CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

BIBLIOGRAFIA BÁSICA
Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor
Aloisio Teixeira

Vice-Reitora
Sylvia Vargas

Coordenadora do Fórum de Ciência e Cultura
Beatriz Resende

Editora UFRJ

Diretor
Carlos Nelson Coutinho

Coordenadora de Edição de Texto
Lisa Stuart

Coordenadora de Produção
Janise Duarte

Conselho Editorial
Carlos Nelson Coutinho (presidente)
Charles Pessanha
Diana Maul de Carvalho
José Luís Fiori
José Paulo Netto
Leandro Konder
Virgínia Fontes

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Diomara Pinto
Maria Cândida Ferreira Morgado
Professoras do Instituto de Matemática da UFRJ

MEC/UFF/NDC
Preço 24,73
Fornecedor
MILARE
Unidade: ICEX
Material: Livro
N. Fiscal 002333
Pregão 01/2010
Item 643
2010 NE 900258

515.33
P659
3. ed.
2009
ex. 10

3ª edição / 6ª reimpressão
Editora UFRJ
2009

Copyright © by Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado

Ficha catalográfica elaborada pela
Divisão de Processamento Técnico - SIBI/UFRJ

P659C Pinto, Diomara.
Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis. / Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado. 3. ed. 6a. reimpr. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009.
364 p.; 16 x 23 cm.
1. Cálculo diferencial. 2. Funções. 3. Variáveis. I. Título. II. Morgado, Maria Fernanda Cândida Ferreira.
CDD 515.3

ISBN 978-85-7108-219-9

1ª edição: 1997
2ª edição: 1999
3ª edição: 2000

Capa
Adriana Moreno

Revisão
Carlos Sepúlveda

Editoração Eletrônica
Alexandre Kogut
Maria Cândida Ferreira Morgado

Projeto Gráfico
Maria Cândida Ferreira Morgado

Desenhos
Aquiles Braga Queiroz

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Fórum de Ciência e Cultura
Editora UFRJ
Av. Pasteur, 250 / sala 107 – Praia Vermelha
CEP: 22295-902 – Rio de Janeiro, RJ
Tel./Fax: (21) 2542-7646 / 2295-0346
(21) 2295-1595 r. 111, 124 a 127
http://www.editora.ufrj.br

Apoio

Fundação Universitária
José Bonifácio

330.144

MEC - UFF - NDC - DBT - Biblioteca do Aterrado

Aos nossos filhos

Apresentação

A Sub-Reitoria de Ensino de Graduação e Corpo Discente (SR-1) planeja e executa, desde 1995, seu *Projeto Acadêmico de Graduação*, de cujos objetivos consta o programa PROEDITAR.

O entusiasmo por um projeto desta natureza surgiu quando, no âmbito do Departamento de Métodos Matemáticos do Instituto de Matemática da UFRJ, acompanhamos os trabalhos das professoras Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado na produção do presente texto.

Nosso sentimento de que um projeto como este teria total acolhimento da comunidade universitária foi confirmado posteriormente através de pesquisas desenvolvidas pela Comissão de Avaliação (COOPERA) que demonstraram existir um enorme acervo de publicações didáticas no âmbito dos cursos de graduação da UFRJ. Com a finalidade exclusiva de facilitar os processos de ensino/aprendizagem naqueles cursos, o presente texto é uma resposta a essa demanda e, ao mesmo tempo, uma etapa na execução do programa PROEDITAR do qual todos os docentes estão convidados a participar.

A publicação deste trabalho deveu-se à sua qualidade e ao nível de excelência dos docentes envolvidos, bem como à necessidade de produzir uma publicação embrionária com a finalidade de avaliar nossas condições operacionais de produção e distribuição de textos didáticos, dentro e fora da UFRJ.

Esse é, portanto, um projeto-piloto, com material já desenvolvido e testado há alguns anos, com clientela bem definida e com demanda assegurada.

A SR-1 sente-se no dever de estimular mais essa iniciativa em sua administração, não só porque responderá a uma demanda reprimida, tanto dos docentes quanto dos alunos, como também contribuirá para melhoria dos cursos de graduação, afinal de contas o objetivo maior de todas as ações da Sub-Reitoria de Ensino de Graduação e Corpo Discente.

Dos colegas, esperamos as críticas que venham a contribuir para que o projeto PROEDITAR se constitua numa rotina cujos frutos sejam colhidos pelas presentes e futuras gerações de alunos e professores.

Rio, junho de 1997.

Neyde Felisberto Martins Ribeiro
Sub-Reitora de Graduação e Corpo Discente

Prefácio

Este texto foi elaborado para ser utilizado num primeiro curso de cálculo diferencial e integral de funções de duas e três variáveis reais. Ele é resultado da nossa experiência em ministrar as disciplinas de Cálculo II e Cálculo III para alunos do Instituto de Matemática e da Escola de Engenharia da UFRJ, desde 1974.

Consideramos que o leitor deste texto deve estar familiarizado com o Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real e com a Geometria Analítica do $\mathbb{R}^2$.

Procuramos motivar, geométrica ou fisicamente, os resultados centrais do texto, o que, a nosso ver, facilita a assimilação dos tópicos apresentados.

O conteúdo aqui exposto é dividido em sete capítulos e um apêndice, como passamos a descrever.

No **Capítulo 1**, estudamos as funções vetoriais de uma variável real e suas aplicações ao movimento em duas e três dimensões.

No **Capítulo 2,** determinamos a forma de algumas superfícies, a partir de sua equação. Enfocamos, principalmente, os cilindros, as superfícies de revolução e as superfícies quádricas.

No **Capítulo 3,** introduzimos os conceitos de limite, continuidade e diferenciabilidade de funções de várias variáveis, dando maior ênfase às funções de duas e três variáveis.

No **Capítulo 4**, determinamos os valores máximo e mínimo de funções de duas variáveis definidas em regiões fechadas e limitadas do $\mathbb{R}^2$. Analisamos, também, a existência de valores máximo e mínimo de funções de três variáveis sujeitas a uma ou duas restrições: o método dos Multiplicadores de Lagrange.

No **Capítulo 5**, calculamos integrais duplas e triplas e discutimos algumas de suas aplicações.

No **Capítulo 6**, estudamos as integrais de linha, dando ênfase ao Teorema de Green, que relaciona uma integral de linha no plano com uma integral dupla. Caracterizamos ainda os campos vetoriais conservativos no $\mathbb{R}^2$.

No **Capítulo 7,** abordamos as integrais de superfície, obtendo as duas extensões importantes do Teorema de Green, a saber, os Teoremas de Stokes e de Gauss. Caracterizamos também os campos vetoriais conservativos no $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, no **Apêndice**, apresentamos o Teorema da função implícita, fornecendo várias versões e interpretações geométricas do mesmo. Como aplicação do teorema da função implícita, obtemos uma versão do Teorema da função inversa para funções de $I\!R^2$ em $I\!R^2$, que facilita o entendimento da mudança de variáveis na integral dupla.

Os teoremas cujas demonstrações fogem ao nível elementar do texto são enunciados sem as respectivas demonstrações. Em tais casos, indicamos uma bibliografia onde as mesmas podem ser encontradas.

Os exercícios propostos têm por objetivo complementar e fixar os tópicos aqui desenvolvidos, sendo, desta forma, parte do texto.

Desejamos agradecer aos colegas do Instituto de Matemática da UFRJ que, em diversas ocasiões, trabalharam conosco ministrando as disciplinas de Cálculo II e Cálculo III. Em particular, ao Professor Dinamérico P. Pombo Júnior pelas relevantes sugestões para melhor compreensão do texto e às Professoras Ivone Alves Regal e Maria José C. Maia Monteiro pela resolução da maioria dos exercícios propostos.

Agradecemos, também, às diversas classes de alunos que experimentaram as versões preliminares do presente texto e, em particular, ao aluno Aquiles Braga Queiroz, responsável pelas figuras nele contidas.

As autoras

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS....... 1

§1.1. Funções vetoriais e Curvas parametrizadas 1

§1.2. Exercícios 11

§1.3. Aplicações ao movimento 18

§1.4. Exercícios 21

§1.5. Comprimento de arco 25

§1.6. Exercícios 32

§1.7. Os vetores tangente unitário e normal principal 34

§1.8. Curvatura 39

§1.9. Exercícios 44

CAPÍTULO 2 - ALGUMAS SUPERFÍCIES ESPECIAIS........47

§2.1. Planos 47

§2.2. Cilindros e Superfícies de revolução 51

§2.3. Exercícios 57

§2.4. Superfícies quádricas 59

§2.5. Exercícios 67

CAPÍTULO 3 - CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS............................69

§3.1. Funções de várias variáveis 69

§3.2. Exercícios 75

§3.3. Limite e Continuidade 79

§3.4. Exercícios 85

§3.6. Exercícios 102
§3.7. Regra da cadeia e Vetor gradiente 104
§3.8. Exercícios 113
§3.9. Derivada direcional 116
§3.10. Exercícios 120
§3.11. Derivadas parciais de ordem superior 122
§3.12. Exercícios 126

CAPÍTULO 4 - MÁXIMOS E MÍNIMOS 128

§4.1. Valores extremos de funções de duas variáveis 128
§4.2. Exercícios 140
§4.3. Máximos e mínimos com restrições 141
§4.4. Exercícios 152

CAPÍTULO 5 - INTEGRAIS MÚLTIPLAS 154

§5.1. Interpretação geométrica da integral dupla 154
§5.2. Integral dupla sobre um retângulo 156
§5.3. Integral dupla sobre regiões mais gerais 165
§5.4. Exercícios 171
§5.5. Mudança de variáveis na integral dupla 173
§5.6. Exercícios 184
§5.7. Centro de massa e momento de inércia 187
§5.8. Exercícios 191
§5.9. Integrais triplas 192
§5.10. Mudança de variáveis na integral tripla 197
§5.11. Exercícios 204

CAPÍTULO 6 - INTEGRAIS DE LINHA 207

§6.1. Integral de linha de função escalar 207

§6.2. Integral de linha de campo vetorial 212

§6.3. Exercícios 222

§6.4. Teorema de Green 224

§6.5. Exercícios 233

§6.6. Campos vetoriais conservativos no plano 235

§6.7. Exercícios 243

CAPÍTULO 7 - INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE 247

§7.1. Representação paramétrica de uma superfície 247

§7.2. Exercícios 252

§7.3. Área de superfícies 255

§7.4. Exercícios 260

§7.5. Integral de superfície de função escalar 262

§7.6. Exercícios 265

§7.7. Integral de superfície de função vetorial 267

§7.8. Exercícios 279

§7.9. Teorema de Stokes 280

§7.10. Exercícios 293

§7.11. Teorema de Gauss 296

§7.12. Exercícios 306

APÊNDICE - FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE .. 309

§A.1. Curvas no plano xy definidas implicitamente 309

§A.2. Superfícies definidas implicitamente 314

§A.4. Teorema da função implícita (caso geral) 320

BIBLIOGRAFIA 325

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 327

ÍNDICE ALFABÉTICO 346

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS

Neste capítulo introduziremos os conceitos de limite e de derivada para funções vetoriais de uma variável real, aplicando-os ao estudo do movimento em duas e três dimensões.

§1.1 Funções vetoriais e Curvas parametrizadas

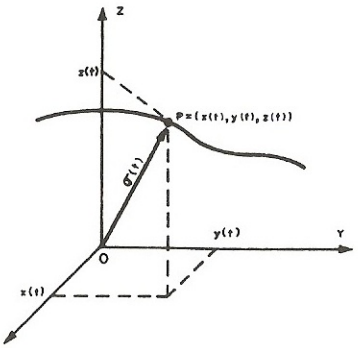
Definição 1.1: Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores é chamada uma **função vetorial**.

Uma função vetorial definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, é denotada por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \quad t \in I, \tag{1.1}$$

onde $x(t), y(t), z(t)$ são funções reais definidas em I.

O vetor $\sigma(t)$ é representado geometricamente pelo vetor OP, onde $P = (x(t), y(t), z(t))$; ver a figura 1.1.



Definição 1.2: O limite de $\sigma(t)$ quando t se aproxima de t_1 é definido por

$$\lim_{t \to t_1} \sigma(t) = (\lim_{t \to t_1} x(t)\ ,\ \lim_{t \to t_1} y(t)\ ,\ \lim_{t \to t_1} z(t)),$$

se $\lim_{t \to t_1} x(t)$, $\lim_{t \to t_1} y(t)$ e $\lim_{t \to t_1} z(t)$ existem.

Definição 1.3: A função $\sigma(t)$ é contínua em $t_1 \in I$ se,e somente se,

$$\lim_{t \to t_1} \sigma(t) = \sigma(t_1).$$

Segue das definições 1.2 e 1.3 que $\sigma(t)$ é contínua em t_1 se,e somente se, $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são contínuas em t_1.

Dizemos que a função $\sigma(t)$ é **contínua em I** se $\sigma(t)$ é contínua $\forall t \in I$.

Quando $\sigma(t)$ é contínua em I, o ponto final P do vetor $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ descreve uma **curva C** no $\mathbb{R}^3$,ou seja,para cada $t \in I$,obtemos um ponto $P = (x, y, z) \in C$, onde

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad e \quad z = z(t). \tag{1.2}$$

A equação (1.1) é dita uma **parametrização** da curva C, as equações (1.2) são chamadas **equações paramétricas** da curva C e a variável t é o **parâmetro**.

Se eliminarmos o parâmetro t nas equações (1.2) obteremos uma expressão cartesiana da curva C.

Tendo em vista que um vetor do $\mathbb{R}^2$ pode ser interpretado como um vetor do $\mathbb{R}^3$ com terceira componente nula, equações análogas às (1.1) e (1.2) podem ser definidas para funções vetoriais com valores em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.1: As curvas C_1 e C_2, no plano xy, de equações paramétricas $x = t, y = = t^2$ $(t \in I\!R)$ e $x = t^2, y = t^4$ $(t \in I\!R)$, respectivamente, possuem a mesma equação cartesiana, embora sejam curvas diferentes.

De fato, as curvas C_1 e C_2 têm a mema equação cartesiana $y = x^2$. A curva C_1 está representada pela parábola $y = x^2$, $x \in I\!R$, enquanto a curva C_2 está representada pela porção da parábola $y = x^2$, $x \geq 0$ (figura 1.2).

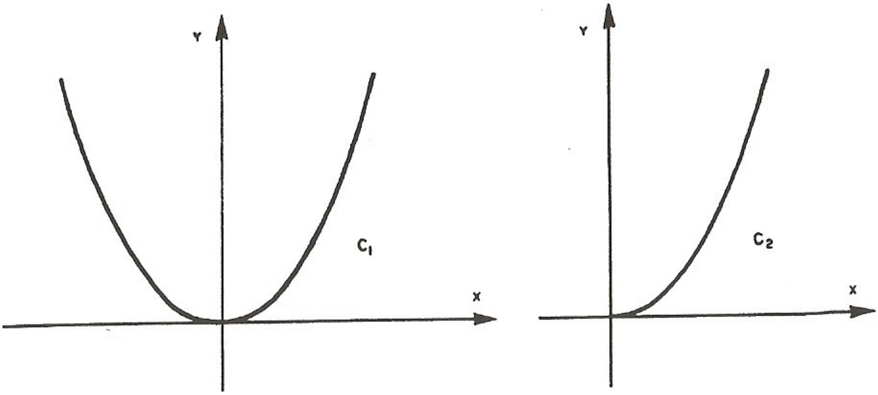


Figura 1.2

Exemplo 1.2: Seja L a reta no $I\!R^3$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $V = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ (figura 1.3).

Se $P = (x, y, z) \in L$, então $OP = OP_0 + tV$ para algum $t \in I\!R$,isto é,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3).$$

Logo,uma parametrização de L é

$$\sigma(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3) \quad , \quad t \in I\!R.$$

Portanto, suas equações paramétricas são:

$$x = x_0 + tv_1 \quad , \quad y = y_0 + tv_2 \quad e \quad z = z_0 + tv_3, \quad t \in I\!R.$$

Eliminando o parâmetro t nas equações paramétricas de L, obtemos uma expressão cartesiana da reta L.

Se v_1, v_2 e v_3 são não nulos, então

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

é uma expressão cartesiana da reta L.

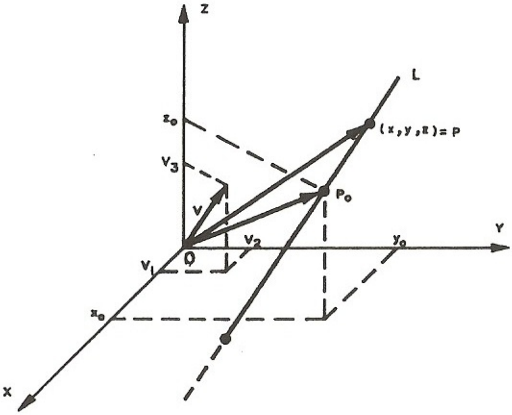


Figura 1.3

Exemplo 1.3: Seja C a curva no plano xy, gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $x \in I$. Uma **parametrização natural** de C é

$$\sigma(t) = (t, f(t)) \quad , \quad t \in I.$$

A reta de equação $2x - y = 1$, por exemplo, tem uma parametrização natural $\sigma(t) = (t, 2t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Pelo exemplo 1.2, esta reta também pode ter parametrização dada por $\sigma(t) = (1 + t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, tomando $P_0 = (1, 1)$ e $V = (1, 2)$.

Exemplo 1.4: Seja C a circunferência no plano xy de centro na origem e raio a (figura 1.4).

É fácil ver na figura 1.4 que

$$x = a\cos\theta \quad e \quad y = a \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

são equações paramétricas de C.

Eliminando o parâmetro θ nas equações paramétricas de C, obtemos a equação $x^2 + y^2 = a^2$, que é a equação cartesiana de C.

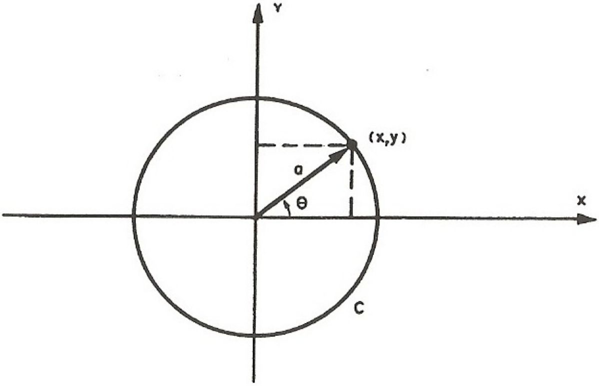


Figura 1.4

Exemplo 1.5: A curva plana C descrita por um ponto P sobre uma circunferência quando esta gira ao longo de uma reta é chamada **ciclóide**.Suponhamos que a circunferência tenha raio a e o eixo x seja a reta fixa sobre a qual gira a circunferência. Consideremos o ponto P na origem quando o centro da circunferência está em $(0, a)$.A figura 1.5 mostra a circunferência depois de o ponto P ter girado um ângulo de θ radianos.

Na figura 1.5, vemos que

$$OT = \text{comprimento do arco } PT = a\theta \ , \quad PQ = a \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad MQ = a\cos\theta.$$

Portanto,as equações paramétricas de C são

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad y = a(1-\cos\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

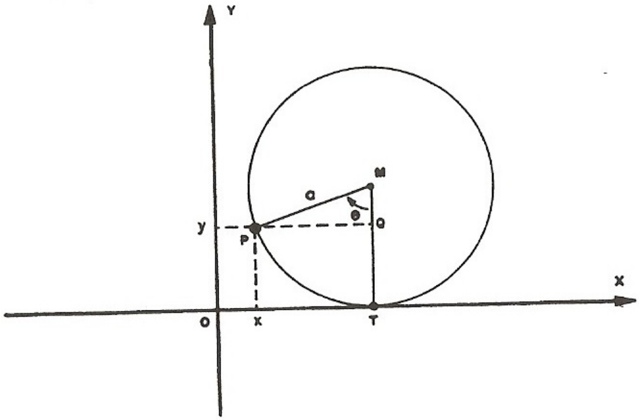


Figura 1.5

Um esboço da ciclóide pode ser visto na figura 1.6.

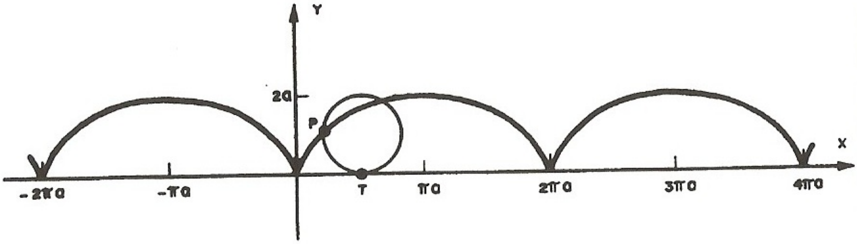
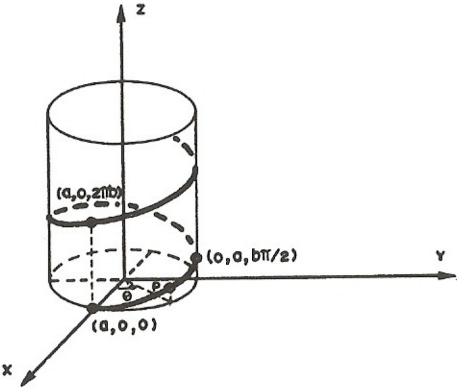


Figura 1.6

Exemplo 1.6: Um ponto $P = (x, y, z)$ se move em torno do eixo z mantendo uma distância constante $a > 0$ deste eixo. Simultaneamente, ele se move paralelamente ao eixo z de modo que sua terceira componente é proporcional ao ângulo de rotação com constante de proporcionalidade $b \neq 0$. A curva descrita por este ponto é chamada **hélice circular**. Consideremos, no início do movimento, o ponto P em $(a, 0, 0)$. A figura 1.7 mostra o ponto P após uma rotação de θ radianos.

Se θ é o ângulo de rotação,temos

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = a\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = b\theta.$$



(Considerando $b > 0$)

Figura 1.7

Quando θ varia de 0 a 2π,as coordenadas de x e y voltam ao valor inicial e z varia de 0 a $2\pi b$.Uma parametrização da hélice é

$$\sigma(\theta) = (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta, \mathrm{b}\theta), \qquad \theta \in \mathrm{R}.$$

Definição 1.4: A derivada da função vetorial $\sigma(t)$ $(t \in I)$ é a função vetorial,denotada por $\sigma'(t)$, definida por

$$\sigma'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t}$$

nos pontos $t \in I$ para os quais o limite acima existe.

Segue das definições 1.2 , 1.4 e da definição de derivada de uma função real que

$$\sigma'(t) = (x'(t)\ ,\ y'(t)\ ,\ z'(t))$$

se $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ existirem.
Dizemos que a função vetorial $\sigma(t)$ é **diferenciável** em I se $\sigma'(t)$ existir,$\forall t \in I$.
Dizemos que a função vetorial $\sigma(t)$ é de **classe $\mathbf{C^1}$** em I se $\sigma(t)$ é diferenciável em I e $\sigma'(t)$ é contínua em I.

Há uma interpretação geométrica para o vetor $\sigma'(t)$.Seja C a curva definida por $\sigma(t)$.Conforme a figura 1.8,se OP e OQ são os vetores posição correspondentes a $\sigma(t)$ e $\sigma(t + \Delta t)$, respectivamente, então o vetor $PQ = OQ - OP$ é uma representação do vetor $\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)$. Segue que $\frac{1}{\Delta t}PQ$ corresponde ao vetor $\frac{1}{\Delta t}(\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t))$ e tem a mesma direção do vetor PQ.Fazendo Δt aproximar-se de zero,temos que Q tende para P, e o vetor $\frac{1}{\Delta t}PQ$ se aproxima de um vetor que tem uma de suas representações tangente à curva C no ponto P.Por esta razão, nos referimos a $\sigma'(t)$ como **vetor tangente** à C em P.

O resultado deste exemplo é evidente geometricamente quando $\sigma(t)$ é um vetor do $I\!\!R^2$, pois, se $\|\sigma(t)\|$ é constante, então a curva C definida por $\sigma(t)$ é um arco de circunferência com centro na origem.O vetor tangente a C, $\sigma'(t)$, é sempre ortogonal ao raio da circunferência, e , daí, a $\sigma(t)$.

Exemplo 1.8: Determine equações paramétricas da reta tangente à hélice definida por $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ no ponto $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solução : O ponto P_0 é o ponto final do vetor $\sigma\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

O vetor $\sigma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}, 1\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ é tangente à hélice em P_0.

Portanto, as equações da reta tangente à hélice em P_0 são:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \ , \ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t \ , \ z = \frac{\pi}{3} + t \ \ , \ t \in I\!\!R.$$

O teorema a seguir estabelece a regra da cadeia para funções vetoriais.

Teorema 1.1: *Se $\sigma(u)$ é uma função vetorial diferenciável em I e u é uma função real diferenciável de uma variável real t cuja imagem está contida em I, então*

$$\frac{d}{dt}\sigma(u(t)) = \frac{d\sigma}{du}(u(t)) \ \frac{du}{dt}(t). \tag{1.3}$$

Demonstração: Se $\sigma(u(t)) = (x(u(t)) \ , \ y(u(t)) \ , \ z(u(t)))$, então

$$\frac{d}{dt}\,\sigma(u(t)) = \left(\frac{d}{dt}\,x(u(t)) \ , \ \frac{d}{dt}\,y(u(t)) \ , \ \frac{d}{dt}\,z(u(t))\right).$$

Pela regra da cadeia para funções de uma variável real temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\sigma(u(t)) &= \left(\frac{dx}{du}\,(u(t))\,\frac{du}{dt}(t)\,,\;\frac{dy}{du}\,(u(t))\,\frac{du}{dt}(t)\,,\;\frac{dz}{du}\,(u(t))\,\frac{du}{dt}(t)\right) = \\ &= \left(\frac{dx}{du}\,(u(t))\,,\;\frac{dy}{du}\,(u(t))\,,\;\frac{dz}{du}\,(u(t))\right)\,\frac{du}{dt}(t) = \\ &= \frac{d\sigma}{du}\,(u(t))\;\frac{du}{dt}(t).\end{aligned}$$

§1.2 Exercícios

1. Para cada um dos seguintes pares de equações paramétricas, esboce a curva e determine sua equação cartesiana.

a) $x = -1 + t \quad , \quad y = 2 - t, \quad t \in I\!R.$

b) $x = -1 + t^2 \quad , \quad y = 2 - t^2, \quad t \in I\!R.$

c) $x = \cos^2 t \quad , \quad y = \operatorname{sen}^2 \mathrm{t}, \quad t \in I\!R.$

d) $x = t^2 \quad , \quad y = t^3, \quad t \in I\!R.$

e) $x = t^2 - 4 \quad , \quad y = 1 - t, \quad t \in I\!R.$

f) $x = \operatorname{sen} \mathrm{t} \quad , \quad y = \cos 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$

g) $x = \cos t \quad , \quad y = -3 + \operatorname{sen} \mathrm{t}, \quad t \in [0, 2\pi].$

h) $x = 3\cos t \quad , \quad y = 2\operatorname{sen} \mathrm{t}, \quad t \in [0, 2\pi].$

i) $x = \sec t \quad , \quad y = \operatorname{tg} \mathrm{t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

As equações de a),b) e c) representam a mesma curva?

2. Faça um esboço das curvas definidas pelas seguintes funções vetoriais:

a) $\sigma(t) = (2, 1, t), \quad t \in I\!R.$

b) $\sigma(t) = (t, t, t), \quad t \in [-1, 1].$

c) $\sigma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} \mathrm{t}, 5), \quad t \in [0, 2\pi].$

d) $\sigma(t) = (3, \cos t, \text{sen t}), \quad t \in [0, \pi]$.

e) $\sigma(t) = (t^2 - 1, 2, t), \quad t \in [0, +\infty)$.

3. Dê uma parametrização para cada uma das curvas.

a) a reta $2x - 3y = 6$.

b) a parábola $x^2 = 4ay$.

c) a circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

d) a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq 0$.

e) o ramo da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq a$.

f) a reta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$.

g) o segmento de reta que liga os pontos $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (2, 3, 3)$.

4. Uma haste,presa na origem do plano xy,ocupa a posição da reta $x = ty$.A haste intercepta a reta $y = 4$ no ponto S e a elipse $4x^2 + (y-2)^2 = 4$ no ponto Q(figura 1.9).Quando t varia,o vértice P do triângulo retângulo QPS descreve uma curva.

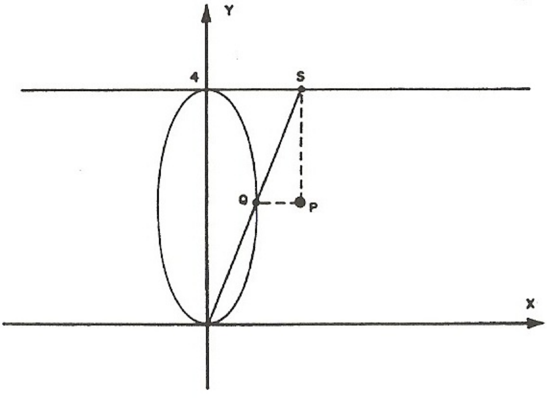


Figura 1.9

a) Escreva equações paramétricas dessa curva, em função do parâmetro t.

b) Esboce essa curva.

c) Determine sua equação cartesiana.

5. Uma haste,presa na origem do plano xy,ocupa a posição da reta que faz um ângulo de θ radianos com o eixo positivo dos x.A haste intercepta a reta $y = 2a$ no ponto A e a circunferência $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ no ponto B (figura 1.10).Quando θ varia, o vértice P do triângulo retângulo APB descreve uma curva chamada **curva de Agnesi.**

a) Mostre que

$$\sigma(\theta)=(2a \operatorname{cotg} \theta \ , \ 2a \operatorname{sen}^2\theta), \qquad 0 < \theta < \pi,$$

é uma parametrização da curva de Agnesi, em função do parâmetro θ.

b) Faça um esboço desta curva.

c) Determine sua equação cartesiana.

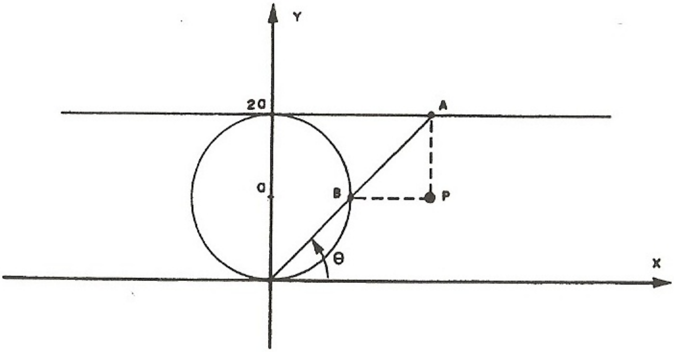


Figura 1.10

6. A **involuta** de uma circunferência é a curva traçada pelo ponto de extremidade de um fio quando o mesmo, mantido tenso, é desenrolado de um

carretel fixo (figura 1.11). Suponha que o centro do carretel está colocado na origem do plano xy e seu raio é a, e que o fio começa a se desenrolar no ponto $A = (a, 0)$. Mostre que as equações paramétricas da involuta, ao desenrolar uma volta do fio no carretel, são:

$$x(\theta) = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{e} \qquad y(\theta) = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

utilizando como parâmetro o ângulo AOT mostrado na figura 1.11. Faça um esboço desta involuta.

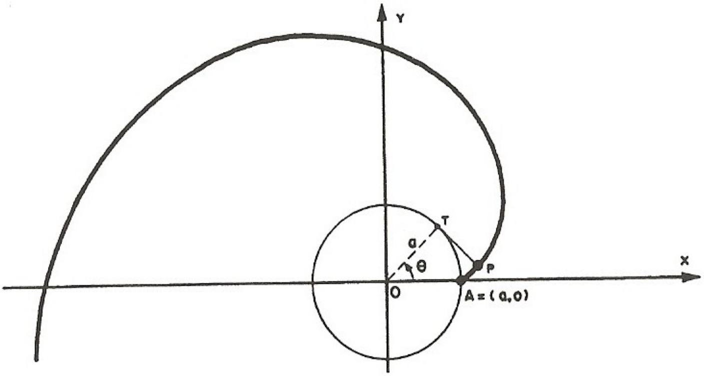


Figura 1.11

7. Uma **hipociclóide** é a curva traçada por um ponto P sobre uma circunferência de raio b que gira dentro de uma circunferência fixa de raio a, $a \geq b$.Suponha que a origem é o centro da circunferência fixa, $A = (a, 0)$ é um dos pontos em que o ponto P toca a circunferência fixa, B é o ponto móvel de tangência das duas circunferências e que o parâmetro θ é o ângulo AOB (figura 1.12). Mostre que as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos(\frac{a-b}{b}\theta)$$

e

$$y = (a - b)\,\mathrm{sen}\,\theta \; - b\,\mathrm{sen}\;\;(\frac{a-b}{b}\theta),$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi.$

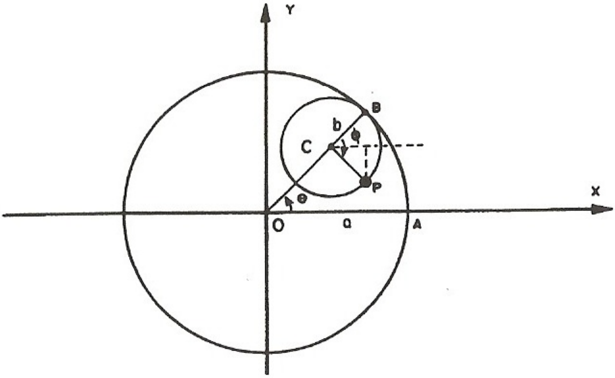


Figura 1.12

8. Se $a = 4b$ no exercício 7,temos uma **hipociclóide de quatro cúspides** ou **astróide**.(Veja um esboço da astróide na figura 1.13.)

a) Mostre que uma parametrização para a astróide é

$$\sigma(\theta) = (a\cos^3\theta, a\,\mathrm{sen}^3\,\theta) \;\;,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

b) Determine a equação cartesiana da astróide a partir de suas equações paramétricas.

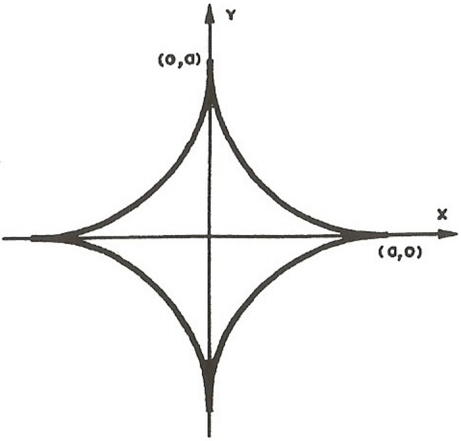


Figura 1.13

9. Se $\sigma'(t) = (\operatorname{sen}^2(t), 2\cos^2(t))$ e $\sigma(\pi) = (0,0)$, encontre $\sigma(t)$.

10. A astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ tem equações paramétricas $x = 2\cos^3 t, y = 2\operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$ (exercício 8).Escreva uma equação da reta tangente à astróide no ponto correspondente a $t = \frac{\pi}{4}$.

11. Seja C a curva definida por $\sigma(t) = (2\cos t, 1 + 2\operatorname{sen} \mathrm{t})$. Determine uma equação da reta normal à curva no ponto $(\sqrt{3}, 2)$.

12. Considere a curva definida por $\sigma(t) = (1+2\ln(1+t), 1+(1+t)^2)$, $t > -1$.

a) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 2)$.

b) Dê uma equação cartesiana da curva.

c) Esboce a curva.

13. Mostre que, se $\sigma(t)$ $(t \in I)$ é uma parametrização de uma reta , então $\sigma''(t)$ é paralelo a $\sigma'(t)$.

14. Mostre que a reta normal à ciclóide (exemplo 1.5 , seção 1.1) em um ponto P contém o ponto de tangência no eixo x da circunferência rolante que passa por P.

15. Seja $\sigma(t)$ uma função vetorial não identicamente nula e de classe C^1.Suponha que o vetor $\sigma(t)$ é paralelo a $\sigma'(t)$.Mostre que existe um vetor constante A e uma função real positiva $f(t)$ tal que $\sigma(t) = Af(t), \ \forall t$.

16. Seja C uma curva parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, de modo que $\sigma''(t) = = k\,\sigma'(t)$ para todo $t \in I\!R$, onde k é uma constante real.

a) Determine as possíveis formas de $x(t)$ e $y(t)$.

b) Que tipo de curva é C?

17. Seja C a curva parametrizada por $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - 2 \operatorname{sen} t), \ 0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Determine o vetor $\sigma'(t)$.

b) Determine a equação da reta tangente à curva no ponto $(-1, 0, 1)$.

18. Escreva equações da reta tangente à curva do $I\!R^3$ parametrizada por $\sigma(t) = = (t, 1 - t^2, 1)$ no ponto $(0, 1, 1)$.

19. Seja σ a função vetorial definida por

$$\sigma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2} \, , \, \frac{1-t^2}{1+t^2} \, , \, 1 \right).$$

Mostre que o ângulo entre $\sigma(t)$ e $\sigma'(t)$ é constante, isto é, independe de t.

20. Considere a hélice definida por $\sigma(\theta) = (a\cos\theta, a \operatorname{sen}\theta, b\theta)$.Mostre que a reta tangente, em cada ponto da hélice, faz um ângulo constante com o eixo z, e que o cosseno desse ângulo é $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

§1.3 Aplicações ao movimento

Suponha uma partícula se movendo no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$, de tal modo que sua posição em cada instante t é dada pela extremidade do vetor $\sigma(t)$.A função $\sigma(t)$ é chamada **função posição** do movimento.Quando t varia num intervalo de tempo, a trajetória da partícula é a curva definida por $\sigma(t)$ percorrida no sentido do crescimento de t.Conceitos físicos tais como vetor velocidade,velocidade escalar e vetor aceleração podem ser definidos em termos das derivadas da função posição.

Nesta seção assumiremos que a função posição é diferenciável tantas vezes quanto necessário.

Definição 1.5: Considere o movimento de uma partícula descrito pela função posição $\sigma(t)$.A derivada $\sigma'(t)$ é chamada **vetor velocidade.** O comprimento do vetor velocidade, $\|\sigma'(t)\|$, é chamado **velocidade escalar**.A derivada segunda, $\sigma''(t)$,é chamada **vetor aceleração.**

Notação: Denotamos o vetor velocidade por $V(t)$, a velocidade escalar por $v(t)$, e o vetor aceleração por $A(t)$. Então, $V = \sigma'$, $v = \|V\|$ e $A = V' = \sigma''$.

Exemplo 1.9: Uma partícula se move sobre a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ no sentido anti-horário, com velocidade angular constante de uma revolução por segundo, começando no ponto $(a, 0)$ quando $t = 0$.Determine:

a)uma parametrização da trajetória tendo o tempo como parâmetro;

b)$V(t)$,$v(t)$ e $A(t)$ e mostre que $A(t)$ é perpendicular a $V(t)$;

c)um esboço da trajetória e as representações dos vetores velocidade e aceleração quando $t = \dfrac{1}{8}$.

Solução: a) Segue do exemplo 1.4 que

$$x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad y = a\,\text{sen}\,\theta$$

são equações paramétricas para a circunferência.Mas,neste caso,o parâmetro θ é função do tempo t.

Como a velocidade da partícula é uma revolução por segundo, então sua velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$ é 2π radianos por segundo. Portanto, $\theta(t) = 2\pi t$, visto que $\theta(0) = 0$.Logo,uma parametrização da trajetória é

$$\sigma(t) = (a\cos 2\pi t\ ,\ a\,\text{sen}\,2\pi\text{t}), \qquad 0 \leq \text{t} \leq 1,$$

se a partícula percorre a circunferência apenas uma vez.

b) $V(t) = \sigma'(t) = (-2\pi a\,\text{sen}\,2\pi\text{t}\ ,\ 2\pi\text{a}\cos 2\pi\text{t})$,

$v(t) = \sqrt{(-2\pi a\,\text{sen}\,2\pi t)^2 + (2\pi a\cos 2\pi t)^2} = 2\pi a$

e $A(t) = \sigma''(t) = (-4\pi^2 a\cos 2\pi t\ ,\ -4\pi^2 a\,\text{sen}\,2\pi t) = -4\pi^2\sigma(t)$.

Pelo exemplo 1.7 temos $\sigma(t)\cdot\sigma'(t) = 0$. Assim,

$$A(t)\cdot V(t) = (-4\pi^2\sigma(t))\cdot\sigma'(t) = 0,$$

mostrando que $A(t)$ e $V(t)$ são perpendiculares.

c) $V(\frac{1}{8}) = (-\sqrt{2}\pi a\ ,\ \sqrt{2}\pi a)\ ,\ A(\frac{1}{8}) = (-2\sqrt{2}\pi^2 a\ ,\ -2\sqrt{2}\pi^2 a)$, e suas representações estão na figura 1.14.

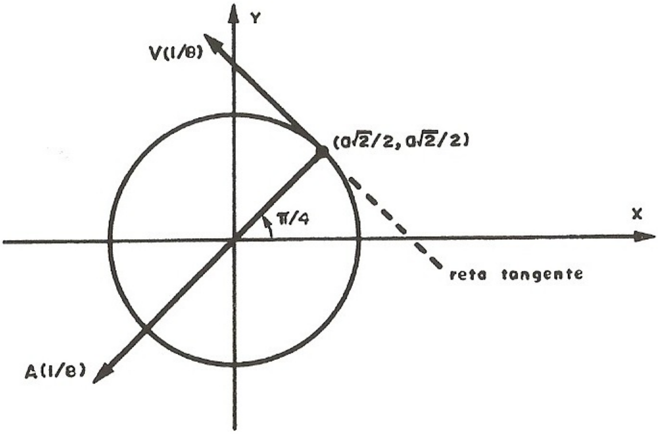


Figura 1.14

Exemplo 1.10: Suponha que um projétil,a uma altura de y_0 metros do chão, é lançado ao ar,fazendo um ângulo de α radianos com a horizontal, com velocidade (escalar) inicial v_0. Desprezando a resistência do ar,podemos supor que a única força que atua sobre o projétil é constante, para baixo, e tem comprimento mg Newtons; assim, o vetor força é $F = (0\ ,\ -mg)$. Determine o vetor posição do projétil em cada instante.

Solução: Se $\sigma(t) = (x(t)\ ,\ y(t))$ é o vetor posição, temos $V(t) = (x'(t)\ ,\ y'(t))$ e $A(t) = (x''(t)\ ,\ y''(t))$, de modo que a lei de Newton $F = mA$ se torna

$$(0\ ,\ -mg) = (mx''\ ,\ my''). \tag{1.4}$$

Deduziremos a expressão da função posição $\sigma(t)$ a partir da equação vetorial diferencial (1.4), juntamente com a posição inicial dada $\sigma(0) = (0\ ,\ y_0)$ e a velocidade inicial $V(0) = (v_0 \cos\alpha\ ,\ v_0 \operatorname{sen}\alpha)$.

A equação vetorial (1.4) significa que as componentes correspondentes são iguais, isto é,

$$mx'' = 0 \quad \text{e} \quad my'' = -mg.$$

Destas equações segue que x' é constante (pois sua derivada é zero) e $y' = -gt + c$ para uma certa constante c. Vemos também que $(x'(0)\ ,\ y'(0)) = (v_0 \cos\alpha\ ,\ v_0 \operatorname{sen}\alpha)$. Logo,

$$x'(t) = v_0 \cos\alpha \quad \text{e} \quad y'(t) = -gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha.$$

Como $x(0) = 0$ e $y(0) = y_0$,concluímos que

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \quad \text{e} \quad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t + y_0.$$

§1.4 Exercícios

Nos exercícios de 1 a 6, $\sigma(t)$ denota o vetor posição de uma partícula se movendo, em cada instante t. Em cada caso, determine:

a) o vetor velocidade $V(t)$;

b) o vetor aceleração $A(t)$;

c) a velocidade escalar em $t = t_1$ e

d) dois vetores tangentes unitários à trajetória da partícula em $t = t_1$.

Trace um esboço da trajetória da partícula e represente geometricamente os vetores $V(t_1)$ e $A(t_1)$.

1. $\sigma(t) = (2 + \cos 6t\ ,\ 2 + \operatorname{sen} 6\mathrm{t}), \quad \mathrm{t}_1 = \frac{\pi}{9}$.

2. $\sigma(t) = (\cos 2t\ ,\ -3\,\mathrm{sen\,t}), \quad \mathrm{t}_1 = \pi.$

3. $\sigma(t) = (e^{2t}\ ,\ t^2), \quad t_1 = 0.$

4. $\sigma(t) = (\cos t\ ,\ \mathrm{sen\,t}\ ,\ 2), \quad \mathrm{t}_1 = \frac{\pi}{2}.$

5. $\sigma(t) = (1\ ,\ t-1\ ,\ t^2+1), \quad t_1 = 2.$

6. $\sigma(t) = (3\cos 2t\ ,\ 3\,\mathrm{sen\,2t}\ ,\ \mathrm{8t}), \quad \mathrm{t}_1 = \frac{\pi}{8}.$

7. Dois carros R_1 e R_2 percorrem, respectivamente, as estradas $BR-01$ e $BR-02$, tendo seus movimentos descritos por

$$\sigma_1(t) = (10t\ ,\ 50t^2) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (7t\ ,\ 70t-50)\ ,\ \ t \geq 0.$$

a) No ponto P onde as estradas $BR-01$ e $BR-02$ se cruzam está situado um posto de fiscalização de velocidades. Encontre este ponto P.

b) Os dois carros chegam juntos ao ponto P? Se não, qual deles chega primeiro?

c) Sabendo que o limite de velocidade em qualquer estrada brasileira é de 80 km/h, qual dos dois será multado no ponto P?

8. Dois carros se movem segundo os seguintes vetores posição:

$$\sigma_1(t) = (1+t\ ,\ 2+3t) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1-t\ ,\ 3+t^2), \ \ t \geq 0.$$

a) Mostre que eles nunca se chocarão.

b) Esboce as estradas sobre as quais eles se movem.

c) Em que pontos elas se cruzam?

d) Em que ponto a velocidade escalar do segundo carro é mínima e qual é esta velocidade ?

9. O vetor posição de uma partícula em movimento é

$$\sigma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \, , \, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

a) Mostre que a partícula se move sobre uma circunferência de centro na origem.

b) Em que sentido a partícula se move, quando t aumenta ?

c) Há pontos na circunferência que não são ocupados pela partícula quando t percorre o intervalo $(-\infty \, , \, +\infty)$?

10. Um objeto inicia seu movimento no ponto $(0 \, , \, -4)$, e se move ao longo da parábola $y = x^2 - 4$, com velocidade horizontal $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 1$. Encontre o vetor posição do objeto, os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 2$ e represente-os geometricamente.

11. Dois carros se movem sobre pistas circulares concêntricas de raios 1 km e 2 km, respectivamente. O primeiro com velocidade angular constante de 20 rd$/h$. O segundo, parte do repouso, e mantém aceleração angular constante de 40 rd$/h^2$. Suponha que no instante inicial os dois carros estão emparelhados.

a) Encontre os vetores posição para os dois movimentos.

b) Quanto tempo leva o segundo carro para se emparelhar novamente com o primeiro ?

c) Ache a velocidade do segundo carro neste instante.

12. Considere uma partícula se movendo no plano ao longo da curva definida por

$$\sigma(t) = (t - \operatorname{sen t} \, , \, 1 - \cos \mathrm{t}), \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi.$$

Determine a velocidade máxima da partícula e o instante em que ela ocorre.

13. Um besouro parte do centro de um relógio muito grande, ao meio-dia, e percorre o ponteiro dos minutos a uma velocidade de 1 cm/s. Suponha que a origem das coordenadas está no centro do relógio. Dê as equações paramétricas para a posição do besouro em função do tempo. Esboce a curva descrita pelo besouro.

Nos exercícios 14 e 15, despreze a resistência do ar e tome $g = 10$ m/s^2.

14. Uma menina atira uma bola horizontalmente do topo de um penhasco de 80 metros de altura, com uma velocidade inicial de 50 m/s. Calcule: (a) o tempo de trajeto da bola e (b) a distância desde a base do penhasco até o ponto em que a bola atinge o solo.

15. Todos sabem que David matou Golias com uma pedrada, bem certeira, arremessada por uma funda. O que nem todos sabem é que David estava a 50,4 metros de Golias no momento em que a pedra foi arremessada, e que este corria na direção de David a 4 m/s. Determine as equações paramétricas da trajetória da pedra de David, sabendo que ela foi lançada a 45^0 com a horizontal. Qual a distância entre David e Golias quando a pedra atingiu Golias ? (Considere desprezível a altura dos dois.)

Para resolver os exercícios 16 e 17, o aluno deve ter familiaridade com as equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

16. Um objeto com vetor posição $\sigma(t) = (x(t)\ ,\ y(t))$ se move ao longo da parábola $y = x^2 - 4$. Sabendo que a componente horizontal do vetor aceleração em cada instante t é $-4\,x(t)$, e que no instante $t = 0$ ele se encontra no ponto $(0\ ,\ -4)$ com vetor velocidade $V(0) = (4\ ,\ 0)$, pede-se:

a) Em que instante o objeto se encontra no ponto $(2\ ,\ 0)$? E no ponto

$(-2\,,\,0)$?

b)Qual o tempo necessário para o objeto voltar ao ponto inicial $(0\,,\,-4)$?

c) Esboce a trajetória do objeto.

17. Uma partícula partindo do ponto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\right)$ se move com vetor posição $\sigma(t) = (x(t)\,,\,y(t))$. Sabe-se que o vetor velocidade em cada instante t é dado por $V(t) = (-y(t)\,,\,3x(t))$.

a) Mostre que, em cada instante t, o vetor aceleração é paralelo ao vetor posição.

b) Determine o vetor posição $\sigma(t)$.

c) Mostre que a curva descrita pela partícula é uma elipse.

d)Qual o tempo necessário para que a partícula dê uma volta na elipse ?

§1.5 Comprimento de arco

Consideremos uma curva definida por $\sigma(t),\ t \in [a,b]$. Podemos pensar que esta curva é a trajetória descrita por uma partícula se movendo com velocidade $v(t) = \|\sigma'(t)\|$. Qual o comprimento desta curva quando t varia de a até b ? Intuitivamente, isto nada mais é do que o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[a,b]$, isto é, $\int_a^b v(t)\,dt$. Isto nos leva à seguinte:

Definição 1.6: Seja C uma curva definida por uma função $\sigma(t),\ a \leq t \leq b$, de classe C^1. O **comprimento da curva** C é definido por

$$L(C) = \int_a^b \|\,\sigma'(t)\,\|\,dt \tag{1.5}$$

Esta fórmula ainda é válida se $\sigma(t)$ é C^1 por partes*.

---

*Uma função $\sigma(t)$ $, t \in [a,b]$, é dita $\mathbf{C^1}$ **por partes** (resp. **contínua por partes**) se o intervalo $[a,b]$ pode ser subdividido num número finito de intervalos fechados de modo que $\sigma(t)$ restrita a cada um desses intervalos é de classe C^1 (resp. contínua).

Se C é uma curva em $\mathbb{R}^3$, a fórmula (1.5) pode ser escrita na forma

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \;\; dt.$$

Quando C é uma curva em $\mathbb{R}^2$, temos

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \;\; dt.$$

A fórmula (1.5) tem uma justificativa baseada no método de aproximação por poligonais, como passamos a descrever. Tomemos uma curva C no $\mathbb{R}^3$. Seja P uma partição regular de ordem n do intervalo $[a, b]$, isto é,

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\},$$

onde $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ e $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \dfrac{b-a}{n}$, para $0 \leq i \leq n-1$.

Consideremos a linha poligonal obtida ligando-se os sucessivos pares de pontos $\sigma(t_i)$, $\sigma(t_{i+1})$, $0 \leq i \leq n-1$ (figura 1.15).

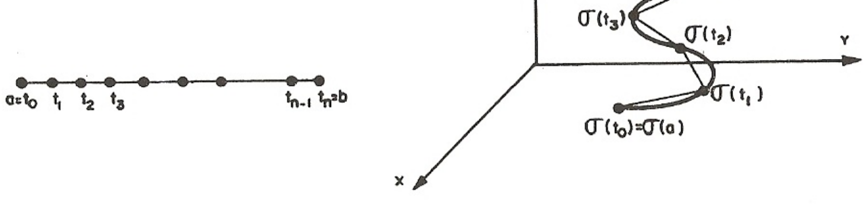


Figura 1.15

Quando Δt é pequeno, o comprimento da linha poligonal é aproximadamente igual ao comprimento de C.

Mas o comprimento do segmento de reta de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é

$$\|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2},$$

onde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando o Teorema de Valor Médio às funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$, obtemos t_i^1 , t_i^2 , t_i^3 $\in (t_i, t_{i+1})$ tais que

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= \; x'(t_i^1)\ \ 't_{i+1} - t_i) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \; y'(t_i^2)\ \ (t_{i+1} - t_i) \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= \; z'(t_i^3)\ \ (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Logo, o comprimento total da linha poligonal é

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma(t_{i+1} - \sigma(t_i)\| = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(x'(t_i^1)\right)^2 + \left(y'(t_i^2)\right)^2 + \left(z'(t_i^3)\right)^2}\ \ (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da curva C é o limite de S_n quando n tende para $+\infty$, se este limite existir. Como $\sigma'(t)$ é contínua, tal limite existe e

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ \ dt.$$

Daí,

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + z'(t))^2}\ \ dt.$$

Exemplo 1.11: Mostre que o comprimento da circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.

Solução: Consideremos a circunferência C de centro na origem e raio r. Podemos parametrizar C por

$$\sigma(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,\mathrm{t})\ , \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi\ \ ;$$

logo, $\sigma'(t) = (-r\,\text{sen}\,t, r\cos t)$ e $\|\sigma'(t)\| = r$.

Portanto, usando (1.5), o comprimento de C é

$$L(C) = \int_0^{2\pi} r\ dt = 2\pi r.$$

Podemos também calcular o comprimento de C usando a parametrização

$$\beta(t) = (r\cos 2\pi t, r\,\text{sen}\,2\pi t)\ , \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Neste caso, $\beta'(t) = (-2\pi r\,\text{sen}\,2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t) = 2\pi\sigma'(2\pi t)$ e $\|\beta'(t)\| = 2\pi\|\sigma'(2\pi t)\| = 2\pi r$. Daí,

$$\int_0^1 \|\beta'(t)\|\ dt = \int_0^1 2\pi r\ dt = 2\pi r = L(C).$$

Note que $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ podem representar os vetores posição de duas partículas que se movem sobre a circunferência C com velocidades diferentes. Como acabamos de ver, tal fato não alterou o valor do comprimento da trajetória C. Provaremos, no próximo teorema, que esta propriedade sempre se verifica.

Sejam $\sigma(t)$ $(a \le t \le b)$ e $\beta(t)$ $(c \le t \le d)$ duas parametrizações de classe C^1 de uma curva C. Dizemos que $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ são **parametrizações equivalentes** se existe uma função $h : [c,d] \to [a,b]$, bijetora e de classe C^1 (logo crescente ou decrescente)*, tal que $\beta(t) = \sigma(h(t))$, $c \le t \le d$.

Se $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ são parametrizações equivalentes e representam os vetores posição de duas partículas que se movem sobre a curva C, então a função h relaciona as velocidades com que as partículas se movem sobre C, pois $\beta'(t) = h'(t)\ \sigma'(h(t))$. Além disso, se h é crescente $(h'(t) > 0)$, então a partícula que percorre C com vetor posição $\beta(t)$ se move no mesmo sentido que a partícula que percorre C com vetor posição $\sigma(t)$. Se h é decrescente $(h'(t) < 0)$, elas se movem sobre C em sentidos contrários.

---

*Se $h : [c,d] \to [a,b]$ é bijetora e contínua, então h é uma função crescente ou decrescente. Ver [5], teorema 2.19.

Teorema 1.2: *O comprimento de uma curva C independe das parametrizações equivalentes escolhidas.*

Demonstração: Sejam

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (x(h(t)), y(h(t))) \quad (c \leq t \leq d)\ ,$$

duas parametrizações equivalentes de C, onde $h : [c, d] \to [a, b]$ é bijetora e tem derivada contínua em $[c, d]$.

Pela fómula (1.5), o comprimento de C é

$$\begin{aligned} L(C_\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\|\ dt = \int_c^d \mid h'(t) \mid \quad \|\sigma'(h(t))\|\ dt = \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_c^d h'(t) \quad \|\sigma'(h(t))\|\ dt & ,\ \text{se } h \text{ é crescente} \\ \displaystyle\int_c^d -h'(t) \quad \|\sigma'(h(t))\|\ dt & ,\ \text{se } h \text{ é decrescente,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde C_β é a curva C com a parametrização $\beta(t)$.

Fazendo a substituição $u = h(t)$, $du = h'(t)\,dt$, e obtemos

$$L(C_\beta) =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{h(c)}^{h(d)} \|\sigma'(u)\|\ du = \int_a^b \|\sigma'(u)\|\ du = L(C_\sigma) & ,\text{se } h \text{ é crescente} \\ \displaystyle\int_{h(c)}^{h(d)} -\|\sigma'(u)\|\ du = -\int_b^a \|\sigma'(u)\|\ du = L(C_\sigma) & ,\text{se } h \text{ é decrescente,} \end{cases}$$

onde C_σ é a curva C com a parametrização $\sigma(t)$.

Exemplo 1.12: Cálculo do comprimento do gráfico de uma função de uma variável real f com derivada contínua no intervalo $[a, b]$.

Solução : Uma parametrização natural para o gráfico G de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é

$$\sigma(t) = (t, f(t)) \ , \quad t \in [a, b].$$

O correspondente $\sigma'(t) = (1, f'(t))$ e $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$.

Portanto, o comprimento do gráfico de f em $[a, b]$ é

$$L(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \ \ dt.$$

Exemplo 1.13: Determine o comprimento da hélice C parametrizada por

$$\sigma(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3\mathrm{t}, 4\mathrm{t}) \ , \ 0 \leq \mathrm{t} \leq 4\pi.$$

Solução: Como $\sigma'(t) = (-3 \operatorname{sen} 3\mathrm{t}, 3 \cos 3\mathrm{t}, 4)$, temos

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 3t + 9\cos^2 3t + 16} = 5;$$

logo, o comprimento da hélice é

$$L(C) = \int_0^{4\pi} 5 \ \ dt = 20\pi.$$

Comprimento de arco como parâmetro

Consideremos $s(t)$ o comprimento de uma curva C, parametrizada por uma função de classe C^1 , $\sigma(t)$, desde o ponto P_0 correspondente a $t = t_0$ até um ponto P correspondente a t, $t \geq t_0$. De (1.5) temos

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\sigma'(u)\| \, du.$$

A função $s(t)$ é crescente e, portanto, tem uma inversa $t = t(s)$. Isto nos permite **parametrizar a curva C em função do parâmetro** s do seguinte modo:

$$\sigma(s) = \sigma(t(s)).$$

Exemplo 1.14: Seja C a curva parametrizada por $\sigma(t) = (t^2, \frac{t^3}{3})$, $t \geq 0$. Encontre equações paramétricas para C tendo s como parâmetro, onde s é o comprimento da curva desde o ponto correspondente a $t = 0$.

Solução: Como $\sigma'(t) = (2t, t^2)$, então $\|\sigma'(t)\| = |t|\sqrt{t^2+4} = t\sqrt{t^2+4}$, $t \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t u\sqrt{u^2+4}\, du = \frac{1}{2}\int_0^t 2u\sqrt{u^2+4}\, du = \\ &= \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(u^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t, \end{aligned}$$

e obtemos

$$s(t) = \frac{1}{3}\,(t^2+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}.$$

Resolvendo esta equação para t em termos de s, temos

$$3s + 8 = (t^2+4)^{\frac{3}{2}}.$$

Conseqüentemente,

$$t^2 + 4 = (3s+8)^{\frac{2}{3}}.$$

Como $t \geq 0$, obtemos

$$t = \sqrt{(3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4}.$$

Substituindo este valor de t na parametrização dada para C, obtemos

$$x(s) = (3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4 \quad \text{e} \quad y(s) = \frac{1}{3}\Big((3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4\Big)^{\frac{3}{2}}$$

Entretanto, nem sempre é possível efetuar estes cálculos.Mesmo que $s = s(t)$ seja conhecido explicitamente, pode ser impossível determinar a inversa $t = t(s)$. Felizmente, raramente há necessidade de termos σ expresso explicitamente como função de s.

Exemplo 1.15: Um ponto se desloca com vetor posição $\sigma(t)$, $t \geq 0$. Seja s o espaço percorrido ao longo da trajetória no intervalo de tempo $[0, t]$. Mostre que o vetor tangente à trajetória $\dfrac{d\sigma}{ds}$ é unitário.

Solução : Parametrizando a trajetória em relação a s, temos

$$\sigma(s) = \sigma(t(s)).$$

Por (1.3), obtemos

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{d\sigma}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} .$$

Então $\dfrac{d\sigma}{ds} = \dfrac{\dfrac{d\sigma}{dt}}{\left\| \dfrac{d\sigma}{dt} \right\|}$, mostrando que $\dfrac{d\sigma}{ds}$ é um vetor unitário.

§1.6 Exercícios

1. Encontre o comprimento do caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo das curvas de equações dadas durante o intervalo de tempo

especificado em cada um dos casos abaixo:

$a)\sigma(t) = (e^t \ \cos t \ , \ e^t \ \text{sen t}) \ ,$ $\qquad 0 \leq t \leq 2.$

$b)\sigma(t) = (a(\cos t + t \,\text{sen t}) \ , \ \text{a}(\text{ sen t} - \text{t}\cos \text{t}))$ $\qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$c)\sigma(t) = (\text{ sen t} \ , \ \text{t} \ , \ 1 - \cos \text{t}) \ ,$ $\qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$d)\sigma(t) = (t \ , \ 3t^2 \ , \ 6t^3) \ ,$ $\qquad 0 \leq t \leq 2.$

$e)\sigma(t) = (t \ , \ \ln(\sec t) \ , \ \ln(\sec t + \ \text{tg t})) \ ,$ $\qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

2. Uma curva tem equação $y^2 = x^3$. Encontre o comprimento da curva do ponto $(1, -1)$ ao ponto $(1, 1)$.

3. Determine o comprimento da astróide (exercício 8 , seção 1.2) quando o parâmetro varia no intervalo $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

4. Calcule o comprimento da curva definida por $\sigma(t) = (t \ , \ 1 - t^2 \ , \ 1)$ do ponto $(0, 1, 1)$ ao ponto $(1, 0, 1)$.

5. Uma partícula se move ao longo de uma curva definida por

$$\sigma(t) = (t - \text{ sen t} \ , \ 1 - \cos \text{t}) \ , \ \ 0 \leq \text{t} \leq 2\pi.$$

a) Determine os instantes $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ onde $v(t) = 1$.

b) Calcule o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.

6. Dois pontos A e B num círculo unitário de centro na origem determinam um setor circular AOB. Mostre que o comprimento dó arco AB é duas vezes a área do setor AOB.

MEC - UFF - NDC - DBT - Biblioteca do Aterrado
POLO UNIVERSITÁRIO DE VOLTA REDONDA
Código da Obra / Código do Exemplar
119020/403799

7. Uma curva C é a união de duas curvas C_1 e C_2 , onde C_1 é um segmento de reta e C_2 é uma porção de circunferência, conforme a figura 1.16. Pede-se:

a) parametrize as curvas C_1 e C_2.

b) o comprimento total de C.

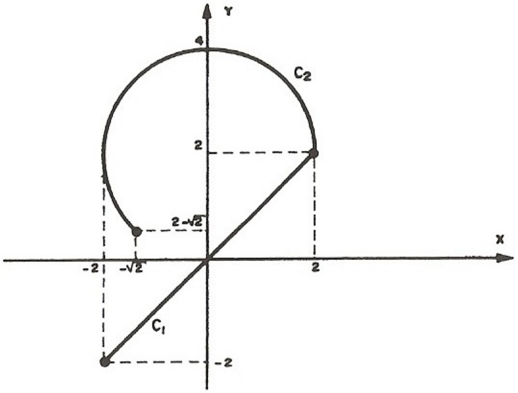


Figura 1.16

§1.7 Os vetores tangente unitário e normal principal

Considere uma partícula móvel com vetor posição $\sigma(t)$, vetor velocidade $V(t)$ e vetor aceleração $A(t)$.Se o movimento da partícula é linear ,isto é, se a sua trajetória é uma reta,então $A(t)$ é paralelo a $V(t)$ (exercício 13,seção 1.2). Para um movimento circular com velocidade angular constante, $A(t)$ é perpendicular a $V(t)$ (exemplo 1.9, seção 1.3).

Nesta seção mostraremos que num movimento qualquer,o vetor $A(t)$ é a soma de dois vetores perpendiculares,um paralelo a $V(t)$ e o outro perpendicular a $V(t)$.

Com este objetivo, introduziremos um **vetor tangente unitário** T definido por

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, \tag{1.6}$$

onde $\|\sigma'(t)\| \neq 0$.

Quando uma partícula se move ao longo de uma curva,o vetor correspondente $T(t)$, sendo de comprimento constante,muda somente de direção. A variação de direção de $T(t)$ é medida por sua derivada $T'(t)$ (como veremos adiante). Como $T(t)$ tem comprimento constante, o exemplo 1.7 da seção 1.1 nos diz que $T(t)$ é perpendicular a $T'(t)$.

Se $T'(t) \neq 0$,o vetor unitário na direção de $T'(t)$ é chamado **normal principal** N à curva e definido por

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}. \tag{1.7}$$

A figura 1.17 mostra os vetores $T(t)$ e $N(t)$ no ponto da curva C definida por $\sigma(t)$ e o plano determinado por estes vetores.

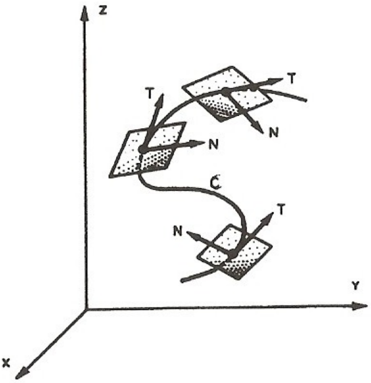


Figura 1.17

O teorema a seguir mostra que o vetor aceleração $A(t)$ é a soma de dois vetores,um paralelo a $T(t)$ e outro paralelo a $T'(t)$.

Teorema 1.3: *Considere uma partícula se movendo com vetor posição* $\sigma(t)$.*Se* $v(t) = = \|\sigma'(t)\| \neq 0$ *é a velocidade da partícula, então o vetor aceleração* $A(t)$ *é dado pela fórmula*

$$A(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)\,T'(t). \tag{1.8}$$

Se $T'(t) \neq 0$, *temos*

$$A(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)\,\|T'(t)\|\,N(t). \tag{1.9}$$

Demonstração: Da fórmula (1.6),temos

$$\sigma'(t) = v(t)\,T(t).$$

Derivando este produto,encontramos

$$A(t) = \sigma''(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)\,T'(t),$$

o que prova (1.8).Para provar (1.9), usamos (1.7) para escrever
$T'(t) = \|T'(t)\|\,N(t)$.

Este teorema mostra, através de (1.9), que $A(t)$ está sempre no plano definido pelos vetores $T(t)$ e $N(t)$. Os coeficientes de $T(t)$ e $N(t)$ em (1.9) são chamados, respectivamente,**componentes tangencial** (A_T) **e normal** (A_N) **da aceleração**.

A taxa de variação da velocidade contribui para a componente tangencial, enquanto a taxa de variação da direção contribui para a componente normal.

Este resultado, comprova o fato bem conhecido de que um motorista deve reduzir a velocidade do carro ao fazer uma curva fechada.

Para uma curva plana, o comprimento do vetor $T'(t)$ é a medida da taxa de variação do ângulo de inclinação de $T(t)$.

Isto pode ser justificado como segue:
Visto que T é um vetor unitário,podemos escrever

$$T(t) = (\cos \alpha(t)\,,\ \text{sen}\ \alpha(\text{t})\,),$$

onde $\alpha(t)$ denota o ângulo entre $T(t)$ e o eixo positivo dos x, como mostra a figura 1.18.

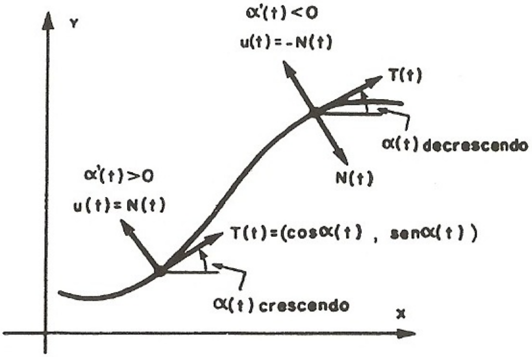


Figura 1.18

A derivada de $T(t)$ é

$$T\,'(t) = (\,-\alpha'(t)\ \text{sen}\ \alpha(\text{t})\ ,\ \alpha'(\text{t})\ \cos \alpha(\text{t})\,) = \alpha'(\text{t})\,\text{u}(\text{t}), \tag{1.10}$$

onde $u(t)$ é o vetor unitário dado por

$$u(t) = (\,-\,\text{sen}\ \alpha(\text{t})\,,\ \cos\ \alpha(\text{t})\,) = \left(\cos\left(\alpha(\text{t}) + \frac{\pi}{2}\right)\ ,\ \text{sen}\ \left(\alpha(\text{t}) + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Portanto, $\| T'(t) \| = | \alpha'(t) |$, o que mostra que $\| T'(t) \|$ é a taxa de variação do ângulo de inclinação de $T(t)$.

Além disso,como $u(t)$ é perpendicular a $T(t)$, temos:

Se $\alpha'(t) \geq 0$ (o ângulo está crescendo) segue de (1.10) que $u(t)$ tem o mesmo sentido de $T'(t)$ e, portanto, $N(t) = u(t)$.

Se $\alpha'(t) \leq 0$ (o ângulo está decrescendo),$u(t)$ tem sentido oposto a $T'(t)$ e, portanto, $N(t) = -u(t)$. Isto mostra que $N(t)$ **aponta sempre para o lado côncavo da curva**.

Exemplo 1.16: Uma partícula se move ao longo da involuta de equações paramétricas

$$x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \quad , \quad y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t, \quad t \geq 0.$$

a)Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

b)Faça um esboço mostrando uma porção da involuta próxima ao ponto em que $t = \frac{\pi}{2}$, e represente os vetores $T(\frac{\pi}{2})$, $N(\frac{\pi}{2})$ e $A(\frac{\pi}{2})$.

Solução: a) O vetor posição é $\sigma(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$; logo,

$V(t) = \sigma'(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t)$ e $A(t) = \sigma''(t) = (-t \operatorname{sen} t + \cos t, t \cos t + \operatorname{sen} t)$.

Portanto, $v(t) = \| V(t) \| = t$ e $A_T(t) = v'(t) = 1$.

Como $A(t) = A_T(t)\, T(t) + A_N(t)\, N(t)$, segue que

$$\begin{aligned} A_N(t) &= \sqrt{\| A(t) \|^2 - (\, A_T(t)\,)^2} = \\ &= \sqrt{(-t \operatorname{sen} t + \cos t)^2 + (t \cos t + \operatorname{sen} t)^2 - 1} = t. \end{aligned}$$

b) $T(t) = \dfrac{V(t)}{\| V(t) \|} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; assim $T(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = (-\operatorname{sen} t, \cos t); \text{ assim } N(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$$
$$\text{e } A(\frac{\pi}{2}) = \sigma''(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2}, 1).$$

Uma representação dos vetores $T(\frac{\pi}{2})$, $N(\frac{\pi}{2})$ e $A(\frac{\pi}{2})$ pode ser vista na figura 1.19.

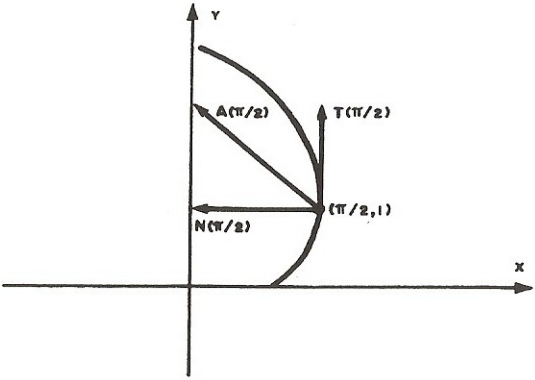


Figura 1.19

§1.8 Curvatura

A **curvatura** de uma curva é a **medida da taxa de variação de sua direção**, tomando esta variação em relação ao comprimento de arco, e não em relação ao parâmetro. Se s representa o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto fixo, então a curvatura k é dada por

$$k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|. \tag{1.11}$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{T'(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{T'(t)}{v(t)},$$

se $v(t) \neq 0$.

Portanto, (1.11) pode ser reduzida a

$$k(t) = \frac{\| T'(t) \|}{v(t)} \tag{1.12}$$

Quando a curva é plana e tem equação cartesiana $y = f(x)$, a equação (1.12) se escreve

$$k(x) = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.13}$$

como o leitor pode verificar sem dificuldade.

Exemplo 1.17: Curvatura de uma circunferência. Determine a curvatura da circunferência definida por

$$\sigma(t) = (a \cos t\,,\ a \operatorname{sen} \mathrm{t}), \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi.$$

Solução: Temos $\sigma'(t) = (\,-a \operatorname{sen} t\,,\ a \cos t\,)\,,\ v(t) = a\,,$
$T(t) = (\,-\operatorname{sen} \mathrm{t}\,,\ \cos \mathrm{t}\,)$ e $T'(t) = (\,-\cos t\,,\ -\operatorname{sen} \mathrm{t}\,)$. Então obtemos $\| T'(t) \| = 1$, e assim $k(t) = \dfrac{1}{a}$.
Isto mostra que a circunferência tem curvatura constante. O inverso da curvatura é o raio da circunferência.

Suponhamos uma curva plana C e um ponto $P \in C$ tal que $k(t)$ existe e $k(t) \neq 0$. O inverso de $k(t)$ é chamado **raio de curvatura** de C em P e denotado por $\rho(t)$, isto é , $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)}$. O círculo passando por P de raio $\rho(t)$ e cujo centro está na semi-reta normal que contém $N(t)$ é chamado **círculo de curvatura**. Ele é tangente a C em P e tem a mesma curvatura da curva (figura 1.20).

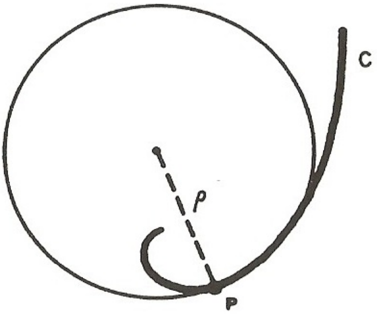


Figura 1.20

Exemplo 1.18: Se a curva C tem equação $xy = 2$, encontre o raio de curvatura de C no ponto $(2,1)$. Faça um esboço da curva e do círculo de curvatura no ponto $(2,1)$.

Solução: A equação cartesiana de C é $y = \dfrac{2}{x}$. Então $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^2}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{x^3}$. Aplicando a fórmula (1.13), temos

$$k(x) = \frac{\mid \frac{4}{x^3} \mid}{\left(1 + \frac{4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e, portanto,

$$k(2) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.$$

Como o raio de curvatura é $\rho = \dfrac{1}{k}$, então no ponto $(2,1)$ temos $\rho = \dfrac{25}{4\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

O esboço pedido é mostrado na figura 1.21.

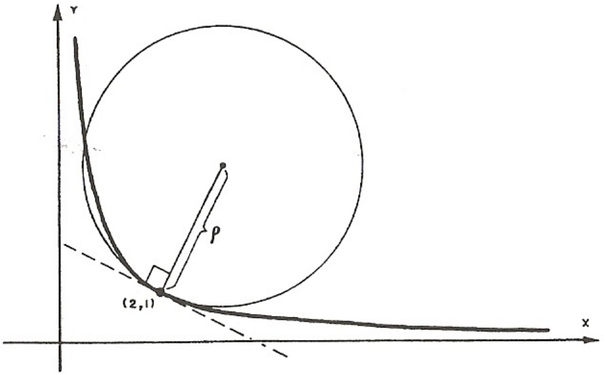


Figura 1.21

O próximo teorema relaciona a curvatura com o vetor velocidade e o vetor aceleração.

Teorema 1.4: *Se uma partícula em movimento possui vetor velocidade* $V(t)$, *velocidade* $v(t)$, *vetor aceleração* $A(t)$ *e curvatura de trajetória* $k(t)$, *então*

$$A(t) = v'(t)\,T(t) + k(t)\,v^2(t)\,N(t). \tag{1.14}$$

Esta fórmula, por sua vez, implica

$$k(t) = \frac{\| A(t) \times V(t) \|}{v^3(t)}, \tag{1.15}$$

onde $A(t) \times V(t)$ *é o produto vetorial de* $A(t)$ *por* $V(t)$

Demonstração: Para provar (1.14), reescrevemos (1.12) na forma $\| T'(t) \| = k(t)\,v(t)$ e substituímos esta expressão na equação (1.9).

Para provar (1.15), fazemos o produto vetorial $A(t) \times V(t)$, usando (1.14) para $A(t)$ e a fórmula $V(t) = v(t)\,T(t)$ para a velocidade. Isto nos dá

$$A \times V = v'\,v\,T \times T + k\,v^3\,N \times T = k\,v^3\,N \times T,$$

pois $T \times T = 0$.
Notando que $\|\,N \times T\,\| = \|\,N\,\|\,\|\,T\,\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, obtemos $\|\,A \times V\,\| = k\,v^3$, o que prova (1.15).

Na prática é fácil calcular os vetores $V(t)$ e $A(t)$ (por diferenciação do vetor $\sigma(t)$); portanto, determinar a curvatura usando a equação (1.15) é mais simples do que usando a definição.

Exemplo 1.19: Uma partícula se move com velocidade constante de 10 unidades por segundo, no sentido anti-horário, ao longo da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Ache o vetor aceleração A no instante em que a partícula passa pelo ponto $(0,3)$.

Solução: Por (1.14), $A = v'\,T + k\,v^2\,N$. Como v é constante, $v' = 0$, e logo $A = k\,v^2\,N$.
Derivando $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ implicitamente em relação a x, obtemos

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{9}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9x}{4y}$$

e

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{-36y + 36x\,\frac{dy}{dx}}{16y^2}.$$

Assim, quando $x = 0$ e $y = 3$, temos $\dfrac{dy}{dx} = 0$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{4}$.
Usando (1.13), obtemos

$$k = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-\frac{3}{4}\right|}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}.$$

Quando $(x, y) = (0, 3)$, o vetor tangente T é horizontal, de modo que o vetor normal principal N aponta **para baixo** (na direção da concavidade da elipse neste ponto). Portanto, no ponto $(0, 3)$, $N = (0, -1)$, e daí

$$A = k\,v^2\,N = \frac{3}{4}\,(10)^2\,(0, -1) = (0, -75).$$

§1.9 Exercícios

1. Mostre que a curvatura de uma curva plana descrita por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ é

$$k(t) = \frac{|x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Observe que esta equação se reduz à equação (1.13) quando a curva tem equação cartesiana $y = f(x)$.

2. Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva C que tem inclinação igual a 1 em $x = 0$. Se $f''(x) = x^2 + \sqrt{2}\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$, determine a curvatura de C quando $x = 0$.

3. Encontre a curvatura e o raio de curvatura no ponto P dado. Trace um esboço da curva e o círculo de curvatura.

a) $y = e^x$; $P = (0,1)$.

b) $y = 2\sqrt{x}$; $P = (0,0)$.

c) $y = \cos x$; $P = (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$.

d) $\sigma(t) = (2e^t, 2e^{-t})$; $P = (2,2)$.

e) $\sigma(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$; $P = (2,0)$.

f) $\sigma(t) = (1 + 2\ln t, 1 + t^2)$; $P = (1,2)$.

4. Determine o raio de curvatura das seguintes curvas no espaço:

a) $\sigma(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen\,t}, 4\cos\ t)$.

b) $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

5. Mostre que a curvatura máxima da curva $y = \ln x$ é $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, a qual ocorre no ponto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

6. As equações paramétricas da trajetória de um cometa são dadas em função do tempo por

$$x(t) = 200\cos t \quad \text{e} \quad y(t) = 10\,\mathrm{sen\,t} \ , \ 0 \le \mathrm{t} \le 2\pi,$$

onde 200 e 10 são medidas expressas em unidades astronômicas (U.A.).

a) Calcule a curvatura da órbita em um ponto qualquer da mesma.

b) Encontre os pontos de máximo e mínimo para a curvatura.

Sugestão: O máximo (mínimo) da curvatura k é o mínimo (máximo) do raio de curvatura $\rho = \dfrac{1}{k}$.

7. Seja $\sigma(t) = (2t - 2\,\mathrm{sen\,t}, 2 - 2\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (ver o exemplo 1.5). Mostre que a curvatura é mínima no ponto mais alto da curva, e máxima no

ponto mais baixo.Encontre os pontos de velocidade máxima e mínima. Esboce a curva, e os vetores velocidade e aceleração nos pontos mais alto e mais baixo da curva.

8. O movimento de uma partícula é dado por $\sigma(t) = (3\cos t, 4\,\mathrm{sen\,t})$. Calcule o comprimento da componente normal da aceleração no instante $t = 0$.

9. Uma partícula se move ao longo do ramo superior da hipérbole $y^2 - x^2 = 9$ de tal forma que $\dfrac{dx}{dt}$ é uma constante positiva. Encontre o que se pede, quando a partícula está em $(4, 5)$: o vetor posição, o vetor velocidade, o vetor aceleração, o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário, as componentes tangencial e normal da aceleração, A_T e A_N .

10. Uma partícula se move sobre a parábola $y = x^2$ da esquerda para a direita. Quando ela passa pelo ponto $(2, 4)$, sua velocidade v é 3 m/s e $\dfrac{dv}{dt}$ vale 7 m/s^2. Ache: (a) o vetor velocidade; (b) o vetor aceleração neste ponto.

11. Uma estrada tem a configuração da parábola $120y = x^2$. Um caminhão está carregado de tal modo que irá tombar se a componente normal da aceleração exceder 30. Que valores da velocidade garantirão uma passagem sem desastre pelo vértice da parábola?

12. Uma partícula se move ao longo de uma curva plana com velocidade escalar constante 5. No instante $t = 0$ ela está na origem $V(0) = (0, 5)$ e nunca se move à esquerda do eixo y. Em cada instante t a curvatura da curva é $k(t) = 2t$. Se $\alpha(t)$ denota o ângulo que o vetor velocidade faz com o eixo positivo dos x em cada instante t, determine:

a) $\alpha(t)$ explicitamente como função de t.

b)O vetor velocidade $V(t)$.

CAPÍTULO 2

ALGUMAS SUPERFÍCIES ESPECIAIS

Neste capítulo daremos uma pequena relação de superfícies que encontraremos freqüentemente e mostraremos como determinar a forma de cada uma a partir de sua equação.

§2.1 Planos

A equação do plano que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ com vetor normal $N = (a_1, a_2, a_3)$ é $(a_1, a_2, a_3).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$. Esta equação pode ser escrita na forma

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2.1}$$

onde $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, e $d = -a_1x_1 - a_2y_1 - a_3z_1$.

Reciprocamente, dada a equação (2.1) com a, b e c não simultaneamente nulos, podemos escolher números x_1, y_1, z_1 tais que $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Conseqüentemente, $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$, e a substituição em (2.1) dá

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$(a, b, c).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0.$$

Esta última equação é a equação do plano que passa pelo ponto (x_1, y_1, z_1) com vetor normal (a, b, c). Acabamos, assim, de estabelecer o seguinte resultado:

O gráfico em $I\!R^3$ *de qualquer equação linear* $ax + by + cz + d = 0$ *é um plano com vetor normal* $N = (a, b, c)$.

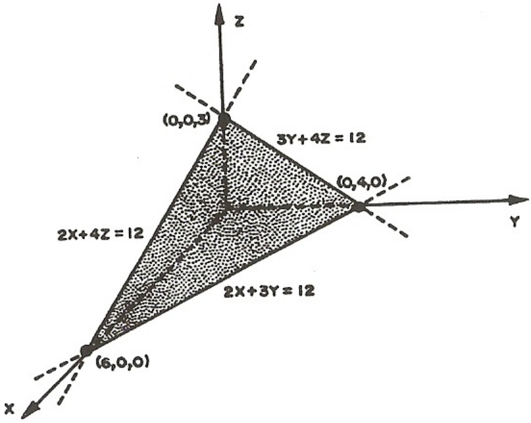
Exemplo 2.1: O gráfico em $I\!R^3$ da equação $z = 0$ é o plano que contém a origem com vetor normal $N = (0, 0, 1)$. Portanto, este plano é o plano coordenado xy. Analogamente, temos que os gráficos em $I\!R^3$ das equações $x = 0$ e $y = 0$ são os planos coordenados yz e xz, respectivamente.

Para esboçar o gráfico de uma equação linear, procuramos determinar, se possível, o **traço** do gráfico em cada plano coordenado, ou seja, a reta segundo a qual o gráfico intercepta o plano coordenado.

Exemplo 2.2: Esboce o gráfico da equação

$$2x + 3y + 4z = 12. \tag{2.2}$$

Solução: Para determinar o traço no plano xy, fazemos $z = 0$ em (2.2) e obtemos a reta $2x + 3y = 12$ no plano xy. Esta reta intercepta o eixo x no ponto $(6, 0, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, 4, 0)$. De modo análogo, os traços nos planos yz e xz são obtidos fazendo, em (2.2), $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente, obtendo assim a reta $3y + 4z = 12$ no plano yz e a reta $2x + 4z = 12$ no plano xz. Estas retas interceptam o eixo z no ponto $(0, 0, 3)$. A figura (2.1) mostra uma porção do gráfico da equação (2.2).



$(2x + 3y + 4z = 12)$

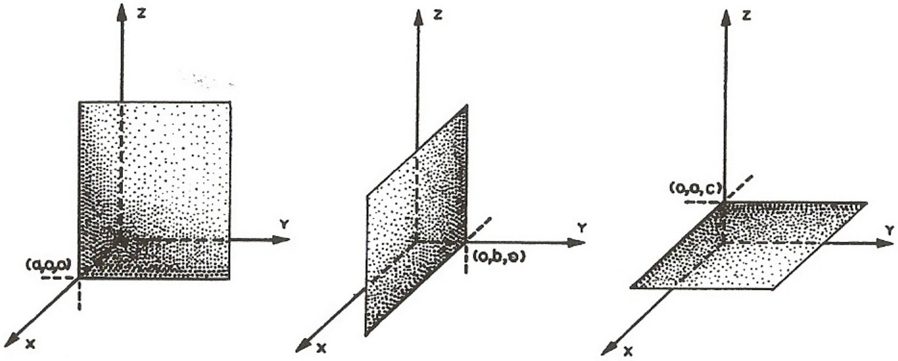
Figura 2.1

Definição 2.1: Dois planos com vetores normais A e B são:

(i) paralelos se A e B são paralelos;

(ii) perpendiculares se A e B são ortogonais.

Exemplo 2.3: O plano de equação $x = a$ passa pelo ponto $(a, 0, 0)$ e tem vetor normal $N = (1, 0, 0)$. O plano coordenado yz também tem vetor normal $N = (1, 0, 0)$. Assim, o plano de equação $x = a$ é paralelo ao plano coordenado yz. Na figura 2.2(i) está esboçada uma porção do gráfico de $x = a$. Analogamente, o gráfico de $y = b$ é um plano paralelo ao plano xz, passando pelo ponto $(0, b, 0)$; e o gráfico de $z = c$ é um plano paralelo ao plano xy,passando pelo ponto $(0, 0, c)$ (figuras 2.2 (ii) e 2.2 (iii)).



$(x = a)$ (i)

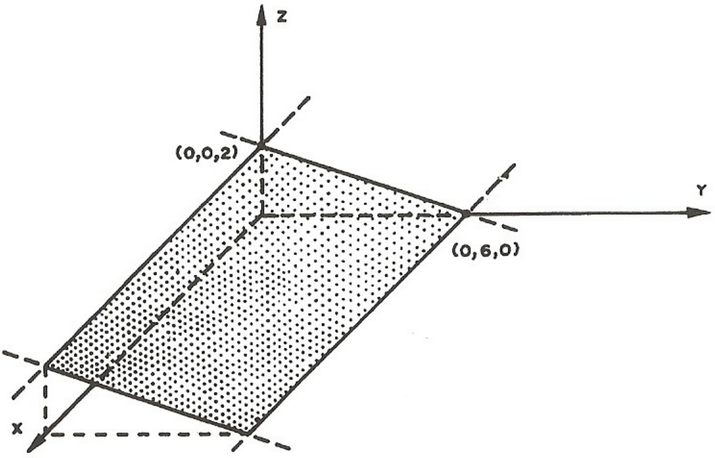
$(y = b)$ (ii)

$(z = c)$ (iii)

Figura 2.2

Exemplo 2.4: Esboce o gráfico da equação $y + 3z = 6$

Solução: Este plano tem vetor normal $N = (0, 1, 3)$, que é ortogonal ao vetor $(1, 0, 0)$. Portanto, o plano de equação $y + 3z = 6$ é perpendicular ao plano yz e o traço de seu gráfico no plano yz é a reta $y + 3z = 6$. Note que o traço do gráfico no plano xz é a reta $z = 2$, que é paralela ao eixo x; e o traço no plano xy é a reta $y = 6$, que é paralela ao eixo x. A figura 2.3 mostra uma porção do gráfico da equação $y + 3z = 6$ e seus traços nos três planos coordenados.



$(y + 3z = 6)$

Figura 2.3

Da mesma forma,os gráficos de $ax + by + d = 0$ e $ax + cz + d = 0$ são planos perpendiculares, respectivamente, aos planos xy e xz.

§2.2 Cilindros e Superfícies de revolução

Definição 2.2: Um **cilindro** é uma superfície gerada por uma reta L que se move ao longo de uma curva plana C dada, de tal modo que ela permaneça sempre paralela a uma reta fixa não situada no plano da curva dada. A reta L é chamada **geratriz do cilindro** e a curva C é chamada **diretriz do cilindro**.

Nos restringiremos apenas a cilindros em que a diretriz C está situada em um dos planos coordenados e a geratriz L é paralela ao eixo coordenado exterior ao plano.

A figura 2.4(i) mostra uma porção do cilindro circular reto cuja diretriz é a circunferência $x^2 + z^2 = 1$ e cuja geratriz é paralela ao eixo y. A figura

2.4(ii) mostra uma porção do cilindro cuja diretriz é a parábola $y = 8x^2$ e cuja geratriz é paralela ao eixo z.

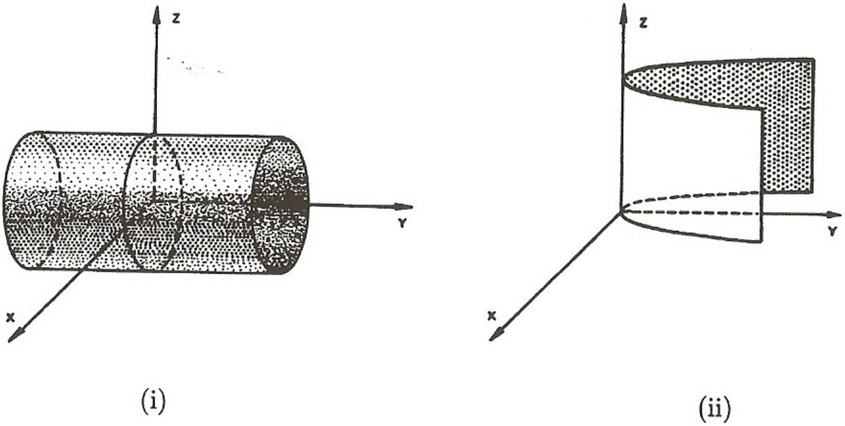


Figura 2.4

Consideremos o problema de encontrar uma equação para um cilindro com diretriz C no plano xy e geratriz paralela ao eixo z.

Suponhamos que C tem equação $F(x, y) = 0$, como na figura 2.5.

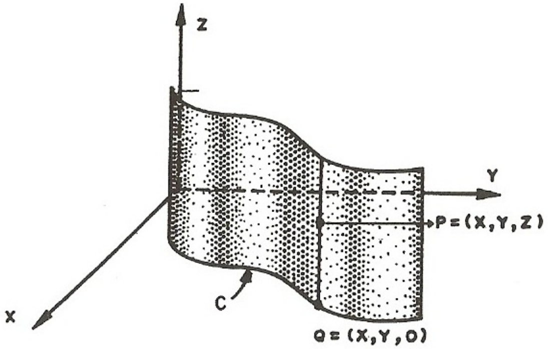


Figura 2.5

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao cilindro se e somente se $Q = (x, y, 0)$ está em C, isto é, se e somente se as duas primeiras coordenadas x e y de P satisfazem à equação $F(x, y) = 0$. Segue que a equação do cilindro é $F(x, y) = 0$, ou seja, é a mesma equação da diretriz no plano xy.

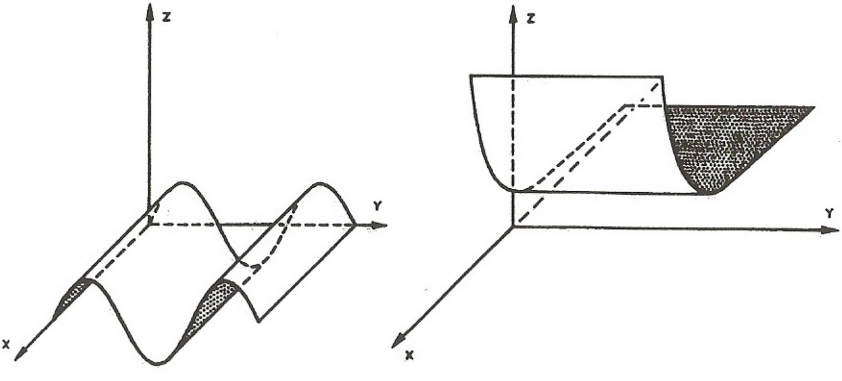
Podemos então concluir que o gráfico no $\mathbb{R}^3$ de uma equação que contém apenas duas das três variáveis x, y e z é um cilindro cuja diretriz é uma curva no plano coordenado das duas variáveis presentes na equação e cuja geratriz é paralela ao eixo associado à variável omitida.

Exemplo 2.5: Esboce o gráfico em $\mathbb{R}^3$ das equações:

a) $z = \operatorname{sen} y$; b) $z - e^x = 0$.

Solução: a) O gráfico é um cilindro cuja diretriz no plano yz tem equação $z = \operatorname{sen} y$ e geratriz paralela ao eixo x. Uma porção do gráfico se encontra na figura 2.6(i).

b) O gráfico é um cilindro cuja diretriz no plano xz tem equação $z = e^x$ e cuja geratriz é paralela ao eixo y. Uma porção do gráfico se encontra na figura 2.6(ii).



$(z = \operatorname{sen}\ y)$

(i)

$(z = e^x)$

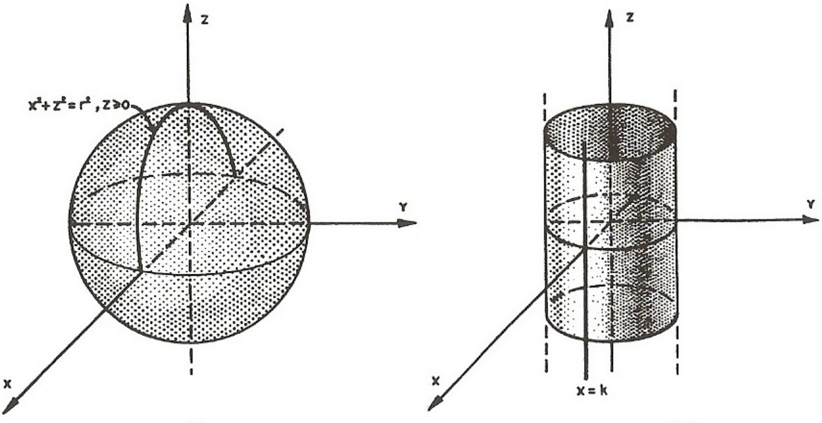
(ii)

Figura 2.6

Definição 2.3: Superfície de revolução é a superfície obtida pela rotação de uma curva plana em torno de uma reta fixa que pertence ao mesmo plano da curva. A curva plana é chamada **curva geratriz** e a reta fixa é o **eixo** da superfície de revolução.

A esfera é um exemplo de uma superfície de revolução, pois pode ser obtida girando-se uma semicircunferência em torno de uma reta que contém o seu centro. A figura 2.7(i) mostra a esfera obtida pela rotação da semicircunferência $x^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$, em torno do eixo x.

Outro exemplo de superfície de revolução é um cilindro circular reto, para o qual a curva geratriz e o eixo são retas paralelas. Se a curva geratriz é a reta $x = k\ (k > 0)$ no plano xz e o eixo é o eixo z, obtemos o cilindro circular reto mostrado na figura 2.7(ii).



(i) (ii)

Figura 2.7

A figura 2.8 mostra a superfície de revolução obtida pela rotação da curva C, no plano yz, de equação $z = f(y)$, em torno do eixo y.

Observe que a interseção da superfície com qualquer plano perpendicular ao seu eixo é uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.

Para encontrar a equação desta superfície de revolução, consideremos $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer na superfície. O plano perpendicular ao eixo de revolução y que passa por P intercepta o eixo y no ponto $R = (0, y, 0)$ e a curva geratriz C no ponto $P_0 = (0, y, f(y))$. Como P e P_0 estão na mesma circunferência de centro em R, temos

$$(RP)^2 = (RP_0)^2 \, ,$$

ou seja,

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2 \, .$$

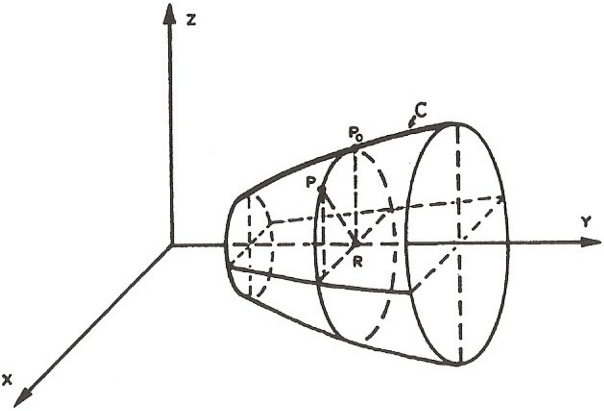


Figura 2.8

Concluímos que a equação da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo y, de uma curva no plano yz de equação $z = f(y)$ é

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2 \, . \tag{2.3}$$

De modo análogo, a equação da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo x, de uma curva num dos planos coordenados contendo este eixo é

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2 \, . \tag{2.4}$$

Se o eixo de revolução é o eixo z e a curva geratriz está num dos planos coordenados contendo este eixo, a equação da superfície de revolução é

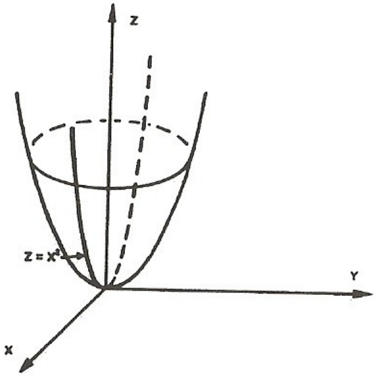
$$x^2 + y^2 = (f(z))^2 \, . \tag{2.5}$$

Exemplo 2.6: Encontre a equação da superfície de revolução obtida pela rotação da parábola $z = x^2$ em torno do eixo z. Esboce o gráfico da superfície.

Solução: Explicitando x como função de z na equação $z = x^2$, obtemos $x = \sqrt{z}$ ou $x = -\sqrt{z}$. Tomando $f(z) = \sqrt{z}$ ou $f(z) = -\sqrt{z}$ em (2.5) temos que a equação da superfície de revolução pedida é

$$x^2 + y^2 = z \,.$$

Esta superfície é chamada **parabolóide circular**. Seu gráfico é mostrado na figura 2.9.



$(z = x^2 + y^2)$

Figura 2.9

Exemplo 2.7: Considere a superfície de revolução de equação $\ln(x^2 + z^2) = -2y$.

a) Determine o eixo de revolução.

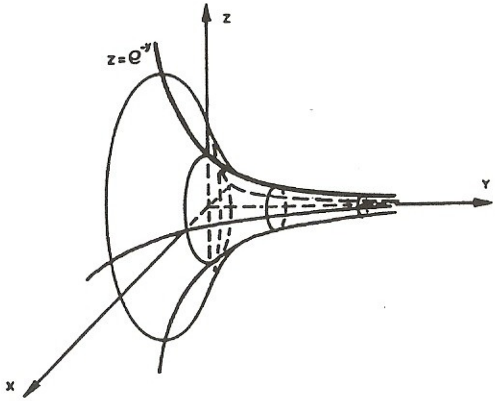
b) Determine a curva geratriz num dos planos coordenados que contém o eixo de revolução.

c) Esboce o gráfico da superfície.

Solução: A equação da superfície de revolução pode ser escrita

$$x^2 + z^2 = e^{-2y} \,.$$

Esta equação é da forma $x^2 + z^2 = (f(y))^2$ e, assim, seu gráfico é uma superfície de revolução que tem o eixo y como eixo. A curva geratriz pode ser a curva de equação $x = f(y) = e^{-y}$, no plano xy, ou a curva de equação $z = f(y) = e^{-y}$, no plano yz. Um esboço do gráfico pode ser visto na figura 2.10.



$(x^2 + z^2 = e^{-2y})$

Figura 2.10

§2.3 Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, esboce o gráfico da superfície de equação dada.

1) (a) $x = -2$; (b) $y = 3$; (c) $z = 4$.

2) (a) $x = 5$; (b) $y = 0$; (c) $z = -2$.

3) $x + 2y - 6 = 0$.

4) $3x - 2z - 12 = 0$.

5) $2z - 5y - 10 = 0$.

6) $2x + y + 5z - 10 = 0$.

Nos exercícios 7 a 17, faça um esboço do cilindro de equação dada.

7) $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

8) $y^2 + z^2 = 16$.

9) $4x^2 + 9z^2 = 36$.

10) $x^2 = 9z$.

11) $y = |z|$.

12) $x^2 - 4y = 0$.

13) $y^2 - x^2 = 16$.

14) $z^2 = 4y^2$.

15) $yz = 1$.

16) $z = \ln x$.

17) $|y| + |z| = 1$.

Nos exercícios 18 a 23, encontre uma equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva plana dada em torno do eixo indicado. Faça um esboço da superfície.

18) $x^2 = 4y$ no plano xy, em torno do eixo y.

19) $z = 4 + y^2$ no plano yz, em torno do eixo z.

20) $x^2 + z^2 = 16$ no plano xz, em torno do eixo x.

21) $z = e^{-x^2}$ no plano xz, em torno do eixo x.

22) $y^2 z = 1$ no plano yz, em torno do eixo z.

23) $y = \text{sen}\ y$ no plano xy, em torno do eixo y.

Nos exercícios 24 a 28, encontre uma curva geratriz e o eixo da superfície de revolução dada. Faça um esboço da superfície.

24) $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, com $x^2 + z^2 \leq 4$.

25) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

26) $z^4 - 16x^2 = 16y^2$.

27) $x^2 + z^2 = |y|$.

28) $x^2 + y^2 = -\ln z$.

§2.4 Superfícies quádricas

O gráfico no plano xy de uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica : uma parábola, uma elipse, uma circunferência, uma hipérbole, ou alguma forma degenerada de uma dessas curvas, tal como um ponto, o conjunto vazio ou um par de retas.

Uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e z tem a forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \qquad (2.6)$$

e o gráfico de tal equação em $I\!R^3$ é chamado de **superfície quádrica**.

Pela rotação ou translação do sistema coordenado do $I\!R^3$, é possível transformar a equação (2.6) em certas formas padronizadas.

O objetivo desta seção é familiarizar o leitor com as superfícies quádricas mais comuns, cuja equação aparece no forma padrão.(As superfícies quádricas que são cilindros, cuja geratriz é paralela aos eixos coordenados, já foram analisadas na seção 2.2.)

Para visualizar, reconhecer e traçar o gráfico destas superfícies, mencionaremos, sucintamente, algumas técnicas básicas. Estas técnicas envolvem a determinação dos **traços** e das **seções** da superfície.

Os **traços** de uma superfície são as curvas de interseção da superfície com os planos coordenados. Por exemplo, a equação do **traço** yz de uma superfície é obtida fazendo $x = 0$ na equação da superfície. As equações do **traço** xz e do **traço** xy são obtidas de modo análogo.

As **seções** de uma superfície são as curvas de interseção da superfície com os planos paralelos aos planos coordenados. Por exemplo, as equações das seções paralelas ao plano yz são obtidas fazendo $x = k$(constante) na equação da superfície. As outras seções são obtidas de modo semelhante.

§2.4.1 Quádricas centrais

Uma superfície quádrica cuja equação padrão é da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2.7}$$

onde a, b e c são constantes positivas, é chamada **quádrica central**.

Uma superfície quádrica central apresenta simetria em relação a cada um dos planos coordenados (por exemplo, a simetria em relação ao plano xz pode ser verificada, observando que a equação (2.7) não se altera quando y é substituído por $-y$) e em relação à origem (a equação (2.7) não se altera se (x, y, z) é substituído por $(-x, -y, -z)$).

As superfícies quádricas centrais são classificadas do seguinte modo:

(i) Se os três sinais do lado esquerdo da equação (2.7) são positivos, a superfície é chamada **elipsóide**.

(ii) Se apenas um dos sinais do lado esquerdo da equação (2.7) é negativo, a superfície é chamada **hiperbolóide de uma folha**.

(iii) Se dois sinais do lado esquerdo da equação (2.7) são negativos e o outro é positivo, a superfície é chamada **hiperbolóide de duas folhas**.

O elipsóide

Os traços do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ nos planos coordenados xy, xz e yz são elipses de equações $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, respectivamente.

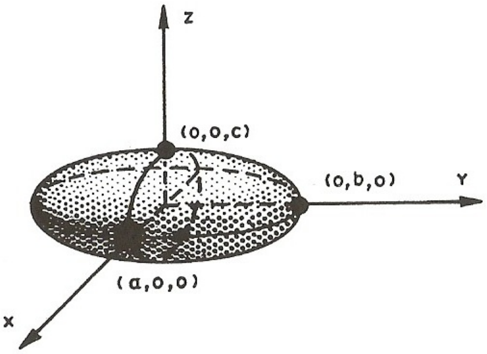
A seção do elipsóide no plano $z = k$ possui equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Se $|k| < c$, a seção é uma elipse. Se $|k| = c$, a seção é o ponto $(0, 0, k)$. Se $|k| > c$, não existe interseção.

De modo análogo, podemos obter as outras seções do elipsóide. Um esboço do elipsóide pode ser visto na figura 2.11.

Observe que, se a, b e c forem iguais na equação de um elipsóide, este será uma esfera e seus traços e seções serão circunferências.



$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$$

Figura 2.11

O hiperbolóide de uma folha

Suponha que apenas o termo envolvendo z^2 possua sinal negativo, de modo que a equação (2.7) tenha a forma

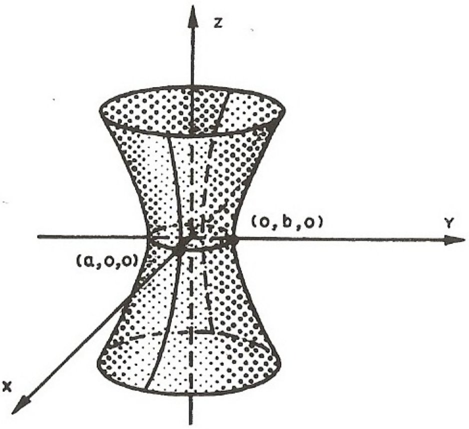
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Os traços da superfície são: o traço xy é a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, o traço xz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ e o traço yz é a hipérbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

A seção da superfície no plano $z=k$ é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}.$$

As seções da superfície nos planos $y=k$ e $x=k$ são hipérboles ou pares de retas. Parte da superfície está esboçada na figura 2.12.



$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$

Figura 2.12

Se $a = b$, o hiperbolóide de uma folha é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo z.

O hiperbolóide de duas folhas

Suponha que apenas os termos envolvendo x^2 e z^2 possuam sinais negativos, de modo que a equação (2.7) tem a forma

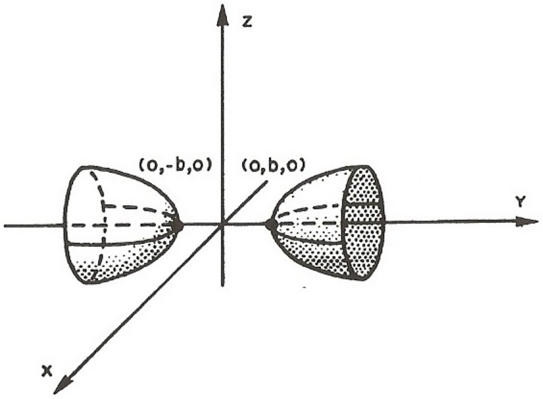
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Não existe traço xz, e os traços yz e xy são as hipérboles $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, respectivamente.

As seções da superfície nos planos $z = k$ e $x = k$ são as hipérboles $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ e $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $y = k$ possui equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1$.
Se $|k| < b$, a seção é vazia. Se $|k| = b$, a seção é o ponto $(0, k, 0)$. Se $|k| > b$ a seção é uma elipse.

Parte da superfície está esboçada na figura 2.13.



$\left(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right)$

Figura 2.13

Se $a = c$, o hiperbolóide de duas folhas é uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo y.

§2.4.2 Cones elípticos

Uma superfície quádrica cuja equação padrão é da forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{2.8}$$

onde a , b e c são constantes positivas e nem todos os sinais do lado esquerdo da equação (2.8) são iguais, é chamada **cone elíptico**.

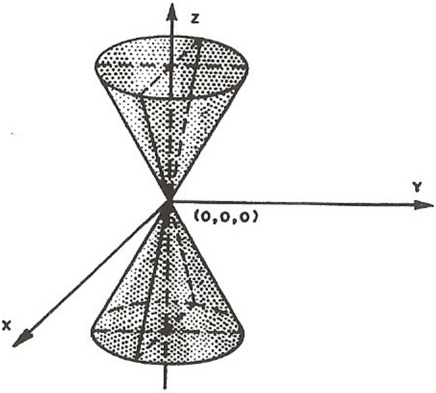
Suponha que o cone elíptico tenha equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

O traço xy é a origem. Os traços xz e yz são os pares de retas concorrentes $z=\pm\frac{c}{a}x$ e $z=\pm\frac{c}{b}y$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z = k$, $k \neq 0$, é uma elipse. As seções nos planos $x = k$ e $y = k$, $k \neq 0$, são as hipérboles $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}$ e $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}$, respectivamente.

Parte da superfície está esboçada na figura 2.14.



$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\right)$

Figura 2.14

Se $a = b$, a superfície é um cone circular e, portanto, uma superfície de revolução cujo eixo é o eixo z.

§2.4.3 Parabolóides elípticos e hiperbólicos

Consideremos uma superfície quádrica cuja equação padrão possui uma das seguintes formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = z \quad \text{ou} \quad \pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = x \quad \text{ou} \quad \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = y\ ,$$

onde a, b e c são constantes positivas.

Se os termos do lado esquerdo destas equações possuem o mesmo sinal, o gráfico de qualquer uma destas equações é chamado **parabolóide elíptico**. Por outro lado, se os termos do lado esquerdo destas equações possuem sinais opostos, o gráfico de qualquer uma destas equações é chamado **parabolóide hiperbólico**.

O parabolóide elíptico

Suponha, por exemplo, que o parabolóide elíptico tenha equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z\ .$$

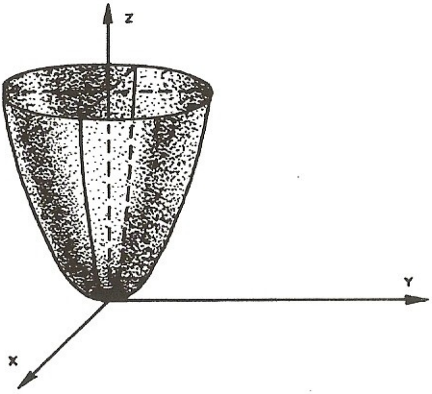
O traço xy é a origem. Os traços xz e yz são as parábolas $z = \dfrac{x^2}{a^2}$ e $z = \dfrac{y^2}{b^2}$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z = k$ possui equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k\ .$$

Se $k > 0$, a seção é uma elipse. Se $k < 0$, a seção é vazia; portanto, a superfície se encontra acima do plano xy. As seções nos planos $x = k$ e $y = k$ são as parábolas $z = \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ e $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2}$, respectivamente.

Uma parte do parabolóide elíptico é mostrada na figura 2.15.



$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z\right)$

Figura 2.15

Se $a = b$, a superfície é um parabolóide circular e, portanto, uma superfície de revolução cujo eixo é o eixo z.

O parabolóide hiperbólico

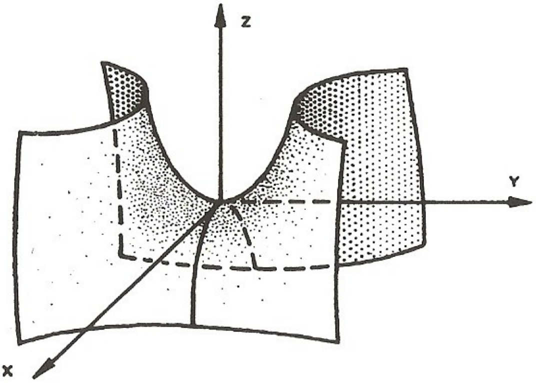
Suponha, por exemplo, que o parabolóide hiperbólico tenha equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\,.$$

O traço xy é o par de retas concorrentes $y=\pm\frac{b}{a}x$. Os traços xz e yz são as parábolas $z=-\frac{x^2}{a^2}$ e $z=\frac{y^2}{b^2}$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z=k$ é uma hipérbole. Se $k>0$, a hipérbole possui equação $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$; se $k<0$, a hipérbole possue equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=|k|$. As seções nos planos $x=k$ e $y=k$ são parábolas com concavidade para cima e para baixo, respectivamente.

Um esboço de uma parte do parabolóide hiperbólico é mostrado na figura 2.16. Observe que nas proximidades da origem o parabolóide hiperbólico tem o formato de uma "*sela de cavalo*".



$(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z)$

Figura 2.16

Exemplo 2.8: Identifique e esboce a superfície quádrica de equação $z^2-9x^2-16y^2=144$

Solução: A equação dada equivale a

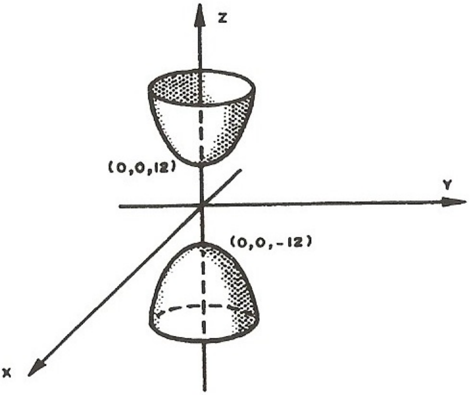
$$-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1\ ,$$

que é da forma da equação (2.7), cujo lado esquerdo possui dois sinais negativos e um positivo; logo, a superfície é um hiperbolóide de duas folhas.

O traço xy é vazio, e os traços xz e yz são as hipérboles $\frac{z^2}{144}-\frac{x^2}{16}=1$ e $\frac{z^2}{144}-\frac{y^2}{9}=1$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z=k$, $|k|>12$, é a elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=\frac{k^2}{144}-1$.

Um esboço do hiperbolóide de duas folhas se encontra na figura 2.17.



$(z^2-9x^2-16y^2=144)$

Figura 2.17

§2.5 Exercícios

1. Escreva a equação e identifique a seção de cada superfície quádrica no plano indicado.

a) $2x^2+3y^2+z^2=6$, $x=1$.

b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1 \quad , \quad z = 4.$

c) $z^2 - \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 0 \quad , \quad y = 0.$

d) $3x^2 + 4y^2 = z \quad , \quad x = 2.$

Nos exercícios 2 a 15: a) determine os traços; b) determine as seções; c) identifique a superfície quádrica; d) esboce seu gráfico.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad , \quad y \leq 0.$

3) $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 36.$

4) $4x^2 - 9y^2 + 9z^2 = 36.$

5) $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36.$

6) $x^2 + 5y^2 = 8z^2.$

7) $z = 4 - 2x^2 - 3y^2.$

8) $x^2 + z^2 = 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1.$

9) $y - x^2 = 1 \quad , \quad -2 \leq x \leq 2.$

10) $z^2 = 1 - 2y + y^2.$

11) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2x + 1 = 0.$

12) $x^2 + y^2 - z^2 - 4y = 0.$

13) $x^2 - y^2 + z^2 + 2y + 3 = 0.$

14) Ache a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao eixo y é $\dfrac{2}{3}$ da distância de P ao plano xz. Identifique a superfície.

15) Escreva a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao ponto (0,0,1) é a mesma do que a de P ao plano $y = -1$. Identifique a superfície.

16) Mostre que a projeção sobre o plano xy da curva de interseção das superfícies $z = 1 - x^2$ e $z = x^2 + y^2$ é uma elipse.

Sugestão: o que significa geometricamente eliminar z dessas equações?

CAPÍTULO 3

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Neste capítulo estenderemos os principais conceitos do cálculo diferencial de funções de uma variável às funções de várias variáveis, dando maior ênfase às funções de duas ou três variáveis.

§3.1 Funções de várias variáveis

Definição 3.1: Uma **função real f de n variáveis** associa a cada n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset I\!R^n$ um único número real $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O subconjunto D de $I\!R^n$ é chamado domínio da função f. Podemos denotar a função f por

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset I\!R^n & \longrightarrow & I\!R \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & w = f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Exemplo 3.1: A função $z = f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$ é uma função de duas variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x, y) \in I\!R^2$ tais que $x \neq y$, isto é, todos os pontos do plano xy que não estão na reta $x = y$.

A função $w = f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ é uma função de três variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x, y, z) \in I\!R^3$ para os quais $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, isto é, todos os pontos de $I\!R^3$, exceto a origem.

Se $f : D \subset I\!R \longrightarrow I\!R$, o gráfico de f, denotado por G_f, é o subconjunto de $I\!R^2$ formado por todos os pares $(x, f(x))$, onde $x \in D$ (figura 3.1(i)).

No caso geral, temos a seguinte definição:

Definição 3.2: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o **gráfico de f**, denotado por G_f, como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos da forma $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, ou seja,

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, \ldots, x_n) \in D\}.$$

No caso $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ (figura 3.1(ii)). Quando $n = 3$, não é possível visualizar o gráfico da f,visto que este é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

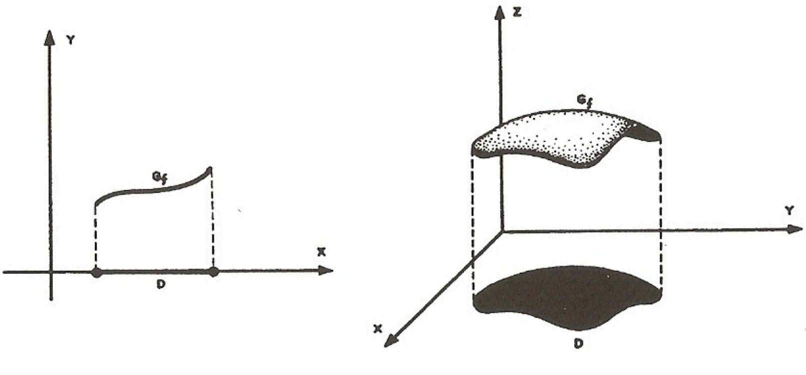


gráfico de função de uma variável

(i)

gráfico de função de duas variáveis

(ii)

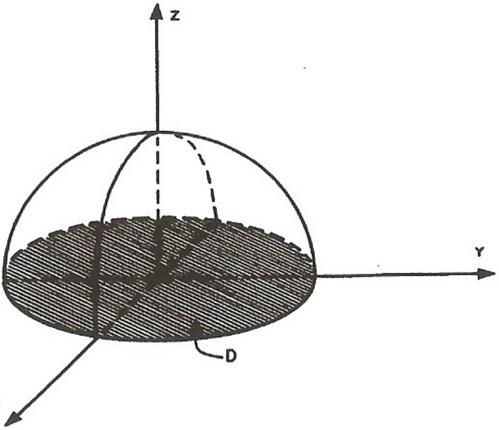
Figura 3.1

Exemplo 3.2: Determine o domínio e esboce o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Solução: O domínio de f é o conjunto de todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, o domínio D de f é o disco circular $x^2 + y^2 \leq 1$, de raio 1 e centro na origem.

Um ponto (x, y, z) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $(x, y) \in D$ e $z = f(x, y)$, isto é, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. A condição $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é equivalente às duas condições $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Deste modo, o gráfico de f consiste da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do plano xy (figura 3.2).



$(z = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$

Figura 3.2

Exemplo 3.3: A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ graus.

(a) Encontre a temperatura no ponto (1,2).

(b) Encontre a equação da curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante e igual a 36 graus.

(c) Esboce a curva do item (b).

Solução: (a) $T(1, 2) = 9 + 16 = 25$ graus.

(b) A curva tem equação $T(x, y) = 36$, isto é, $9x^2 + 4y^2 = 36$, ou $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

(c) A curva de equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ é a elipse da figura 3.3.

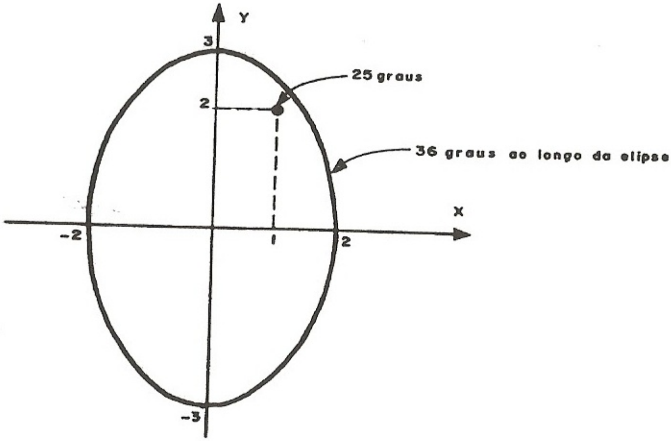


Figura 3.3

Uma curva ao longo da qual a função $z = f(x, y)$ tem valor constante (tal como a curva ao longo da qual a temperatura do exemplo anterior se manteve com valor constante de 36 graus) é denominada **curva de nível** ou **curva de contorno** da função f. A equação da curva de nível ao longo da qual a função $z = f(x, y)$ assume o valor constante k é

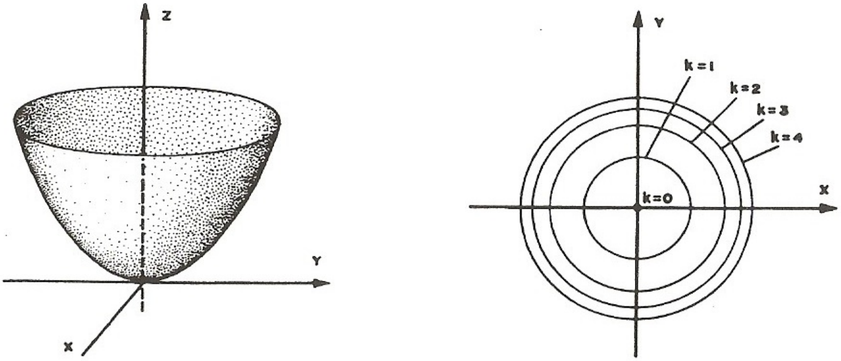
$$f(x, y) = k.$$

Quando a função f representa a temperatura, as curvas de nível de f são chamadas **isotermas**. Se f representa o potencial elétrico, as curvas de nível de f são chamadas **curvas eqüipotenciais**.

Suponha que uma superfície S é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Se a interseção da superfície S com o plano, paralelo ao plano xy, de equação $z = k$ é não vazia, então ela é uma curva cuja projeção no plano xy é a curva de nível $f(x, y) = k$. A cada ponto desta curva de nível corresponde um único ponto na superfície S que está k unidades acima do plano xy, se k for positivo, ou k

unidades abaixo dele, se k for negativo. Ao considerarmos diferentes valores para a constante k, obtemos um conjunto de curvas de nível. Este conjunto de curvas é chamado **mapa de contorno da superfície S** (figura 3.4).

Tal mapa de contorno nos facilita a visualização da superfície, como se estivéssemos sobre ela. As curvas são mostradas, em geral, para valores de z em intervalos constantes. Quando as curvas de nível estão juntas, os valores de z mudam mais rapidamente do que quando elas estão afastadas, ou seja, quando as curvas de nível estão juntas a superfície é "íngreme".



$(z = x^2 + y^2)$ $(f(x,y) = x^2 + y^2 = k)$

Figura 3.4

Exemplo 3.4: Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - y$. Faça um mapa de contorno de f, mostrando as curvas de nível de f em $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1$. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução: As curvas de nível da f são as parábolas

$$y = -x^2 + (4 - k).$$

A figura 3.5 mostra um mapa de contorno de f.

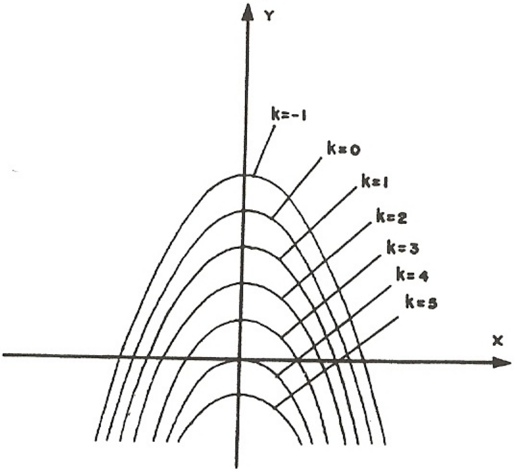
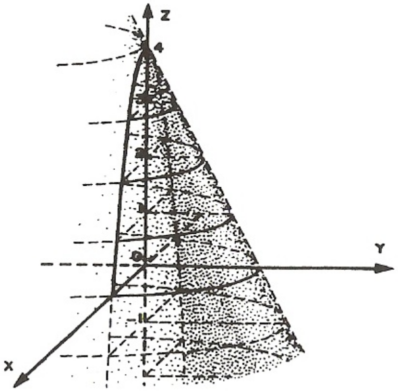


Figura 3.5

O gráfico de f é a superfície de equação $z = 4 - x^2 - y$. O traço xy da superfície é a parábola $y = 4 - x^2$, o traço xz é a parábola $z = 4 - x^2$ e o traço yz é a reta $z = 4 - y$. Um esboço da superfície $z = 4 - x^2 - y$ é mostrado na figura 3.6.



$(z = 4 - x^2 - y)$

Figura 3.6

Quanto às funções de três variáveis $w = f(x, y, z)$, não podemos visualizar seu gráfico. No entanto, podemos considerar as superfícies de equação $f(x, y, z) = k$, quando k varia no conjunto imagem de f. Estas superfícies são chamadas **superfícies de nível para f**.

Toda superfície definida por uma equação em x, y e z pode ser considerada uma superfície de nível de alguma função f de três variáveis. Por exemplo, a superfície do exemplo 3.4 (esboçada na figura 3.6) é a superfície de nível $g(x, y, z) = 4$, onde $g(x, y, z) = x^2 + y + z$.

Exemplo 3.8 : Descreva as superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solução: As superfícies de nível possuem equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = k.$$

Se $k > 0$, a superfície de nível é o hiperbolóide de uma folha (figura 2.12) de equação $\dfrac{x^2}{k} + \dfrac{y^2}{k} - \dfrac{z^2}{k} = 1$.

Se $k < 0$, a superfície de nível é o hiperbolóide de duas folhas (figura 2.13) de equação $-\dfrac{x^2}{|k|} - \dfrac{y^2}{|k|} + \dfrac{z^2}{|k|} = 1$.

Se $k = 0$, a superfície de nível é um cone circular de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (figura 2.14).

§3.2 Exercícios

1. Descreva o domínio das seguintes funções:

   a) $z = \sqrt{x + y - 4}$.

   b) $z = \sqrt{y - 1 - x^2}$.

   c) $z = \dfrac{5\ln(x + y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

d) $z = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$.

2. Considere a superfície S, união de S_1 e S_2, onde S_1 tem equação $x^2 + y^2 = 4$ com $0 \leq z \leq 2$, e S_2 é o gráfico da função $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definida no conjunto D, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$.

   a) Esboce a superfície S_1.

   b) Esboce a superfície S_2.

   c) Esboce a superfície S.

3. Seja S a superfície definida por $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a) Identifique a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k < 2$, $k = 2$ e $k > 2$.

   b) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz.

   c) Faça um esboço de S.

4. Dada a função$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, pede-se:

   a) As equações das curvas de nível $z = \dfrac{1}{4}$, $z = 4$ e $z = 9$.

   b) A equação e o esboço da curva de nível que contém o ponto $(0, 2)$.

   c) Um esboço do gráfico da função.

5. Considere a superfície $z = f(x, y)$, onde

$$f(x,y) = \begin{cases} 8 - x^2 - y^2 & , \quad x^2 + y^2 \leq 4, \\ 4 & , \quad x^2 + y^2 \geq 4\,. \end{cases}$$

   Pede-se:

   a) As interseções da superfície com os planos $z = 8$, $z = 6$, $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

   b) Um esboço da superfície.

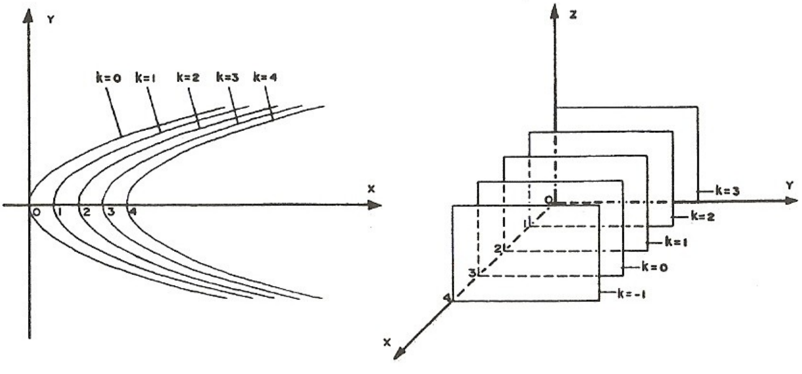
6. Seja $f(x,y) = \sqrt{10 - x - y^2}$.

a) Represente o domínio de f no plano xy e determine a imagem de f.

b) Identifique as interseções do gráfico de f com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $x = 0$.

c) Faça um esboço do gráfico de f.

7. Nas figuras 3.7 (i) e (ii), estão representadas , respectivamente, curvas de nível e superfícies de nível das funções $f(x,y)$ e $g(x,y,z)$. Escreva expressões adequadas para f e g.



(i) (ii)

Figura 3.7

8. Esboce o mapa de contorno e o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x + y^2$.

b) $f(x,y) = \sqrt{y - 1 - x^2}$.

c) $f(x,y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 & , \quad x^2 + y^2 \leq 4, \\ 4 - \sqrt{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$

9. Seja $z = f(x,y) = \sqrt{\dfrac{24 - 6x^2 - 2y^2}{3}}$.

a) Determine o domínio da função f e esboce o seu gráfico.

b) Encontre a curva de nível C da função f que contém o ponto $P = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

c) Dê uma parametrização para a curva C do item b).

d) Calcule o comprimento da reta tangente à curva C no ponto P compreendida entre os eixos coordenados.

10. Considere a função $z = f(x,y) = \begin{cases} 7 - \sqrt{x^2 + y^2} & , 0 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ \sqrt{25 - x^2 - y^2} & , 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de $z = f(x,y)$.

b) Identifique a curva de nível que contém o ponto $P_0 = (1, \sqrt{3})$.

c) Dê uma equação da reta normal à curva de nível do item b) em P_0.

11. A temperatura num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2+3z^2}$ graus. Identifique a superfície do $\mathbb{R}^3$ cujos pontos possuem temperatura igual à temperatura do ponto $(-1,-1,1)$.

12. Descreva o domínio e as superfícies de nível das funções abaixo.

a) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (z-1)^2$.

d) $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - e^{2y}$.

§3.3 Limite e Continuidade

Um ponto variável x no eixo coordenado pode se aproximar de um ponto fixo x_0 de dois modos: à direita de x_0 ou à esquerda de x_0. Um ponto variável (x, y) no plano coordenado pode se aproximar de um ponto fixo (x_0, y_0) por um número infinito de caminhos; veja alguns deles na figura 3.8.

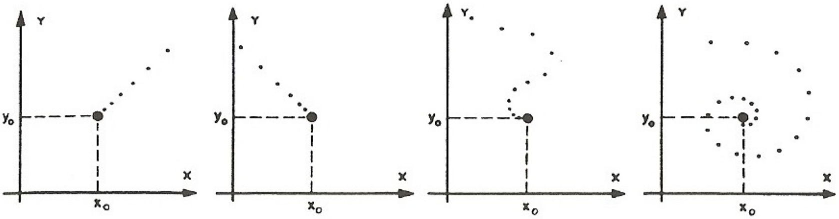


Figura 3.8

Diremos que (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) se a distância entre eles tende a zero,independentemente do percurso feito por (x, y), onde a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) é dada por

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Recordemos que, para funções f de uma variável real, podemos falar do limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, mesmo quando f não está definida em x_0. É necessário apenas que f esteja definida em intervalos abertos da forma $x_0 - r < x < x_0$ ou $x_0 < x < x_0 + r$.

Analogamente, para definir o limite de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis reais, quando (x, y) tende a um ponto fixo (x_0, y_0), não é necessário que $f(x, y)$

esteja definida em (x_0, y_0). Exigimos apenas que (x_0, y_0) seja um ponto de acumulação do domínio D de f, isto é, que cada **bola aberta** de centro em (x_0, y_0) e raio $r > 0$, denotada por $\mathcal{B}_r(x_0, y_0)$, contenha pelo menos um ponto de D distinto de (x_0, y_0), onde

$$\mathcal{B}_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in I\!\!R^2 \, ; \, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}.$$

Definição 3.3 : Sejam $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis definida em $D \subset I\!\!R^2$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é o número L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \qquad \text{ou} \qquad (f(x, y) \to L \text{ se } (x, y) \to (x_0, y_0)),$$

quando

$$\lim_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\to 0} |f(x, y) - L| = 0^* \tag{3.1}$$

(figura 3.9).

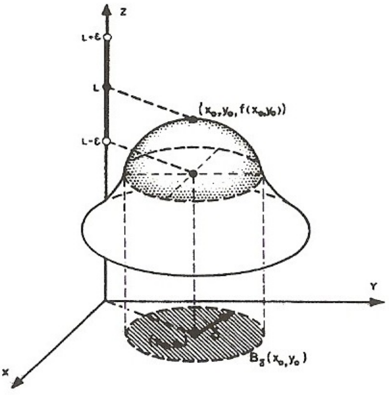


Figura 3.9

---

[*] Isto significa que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo (x, y) pertencente ao domínio de f que está em $\mathcal{B}_\delta(x_0, y_0)$ tem-se $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

A definição 3.3 pode ser estendida às funções de três variáveis. Neste caso, $\mathcal{B}_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \,;\, \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$, e

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L \quad \text{significa} \quad \text{que}$$

$$\lim_{\|\,(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\,\|\to 0} |f(x,y,z) - L| = 0\,.$$

Podemos mostrar, através de argumentos semelhantes, que todas as propriedades de limite de funções de uma variável se estendem às funções de várias variáveis. Por exemplo, o limite da soma, diferença, produto ou quociente é a soma, diferença, produto ou quociente dos limites, respectivamente, contanto que esses limites existam e que os denominadores não se anulem.

Exemplo 3.9: Seja $f(x,y) = 2x^2y - \dfrac{3y^2}{x+y}$. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)$.

Solução: Usando as propriedades de limite para funções de duas variáveis, temos

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} 2x^2y - \frac{3y^2}{x+y} = 2(-1)^2 2 - \frac{3(2^2)}{-1+2} = -8.$$

Exemplo 3.10: Seja f a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos: (i) eixo dos x ; (ii) eixo dos y ; (iii) da reta $y = x$.

b)Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

Solução:

a)(i) Sobre o eixo x, $y = 0$ e $f(x,y) = f(x,0) = \dfrac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$, para $x \neq 0$. Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$.

(ii) Sobre o eixo y, $x = 0$ e $f(x,y) = f(0,y) = \dfrac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$, para $y \neq 0$. Portanto, $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = -1$.

(iii) Sobre a reta $y = x$, $f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = 0$, para $x \neq 0$. Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 0$.

b) Visto que os limites (i), (ii) e (iii) não coincidem, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ não existe.

O exemplo anterior sugere que uma maneira eficiente de se mostrar que $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ *não existe* é mostrar que $f(x,y)$ tende a limites diferentes quando (x,y) tende a (x_0, y_0) por dois caminhos diferentes.

Exemplo 3.11: Seja f a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo da reta $y = mx$.

b) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

c) Existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$?

Solução:

a) Sobre a reta $y = mx$, $f(x,y) = f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \dfrac{mx}{x^2 + m^2}$, para $x \neq 0$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,mx) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx}{x^2 + m^2} = 0$.

b)Sobre a parábola $y = x^2$, $f(x,y) = f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$, para $x \neq 0$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$.

c)Visto que os limites dos itens a) e b) são diferentes, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 3.12: Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo: (i) de cada reta que passa pela origem e (ii) da parábola $x = y^2$.

b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor ?

Solução:

a)(i) Sobre o eixo y, $x = 0$ e $f(x,y) = f(0,y) = 0$, para $y \neq 0$. Portanto, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.

Sobre a reta $y = mx$, $f(x,y) = f(x,mx) = \dfrac{2mx^3}{3x^2 + 3m^2x^2} = \dfrac{2mx}{3 + 3m^2}$, para $x \neq 0$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = 0$.

(ii) Sobre a parábola $x = y^2$, $f(x,y) = f(y^2,y) = \dfrac{2y^5}{3y^4 + 3y^2} = \dfrac{2y^3}{3y^2 + 3}$, para $y \neq 0$. Portanto, $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y) = 0$.

b) Ao longo de todos os caminhos do item a) , o limite é o mesmo, zero. Isto nos leva a suspeitar que o limite existe e é zero. Nossa suspeita é confirmada a seguir:

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left| \frac{2x^2y}{3x^2 + 3y^2} \right| = \frac{2}{3}\frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} .$$

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$, obtemos

$$|f(x,y)| \leq \frac{2}{3}|y|. \tag{3.2}$$

Visto que $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\|$, segue de (3.2) que $|f(x,y)| \leq \dfrac{2}{3}\, \|(x,y)\|$; portanto, $|f(x,y)| \to 0$ quando $\|(x,y)\| \to 0$.

Definição 3.4: Sejam f uma função real de duas variáveis e (x_0,y_0) um ponto do domínio de f. Dizemos que f é **contínua** em (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Se f é uma função de três variáveis, f é **contínua** em (x_0, y_0, z_0) se

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0).$$

Dizemos que f é contínua em D se f é contínua em todos os pontos de D.

Exemplo 3.13: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3x^2+3y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Decida se f é contínua em $(0,0)$.

Solução: Como $f(0,0) = 0$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{3x^2+3y^2} = 0$, como foi mostrado no exemplo 3.12, concluímos que f é contínua em $(0,0)$.

Exemplo 3.14: Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{, se } x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{, se } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

Mostre que:

a) f é contínua nos pontos $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que ${x_0}^2+{y_0}^2 \neq 1$.

b) f é descontínua nos pontos $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que ${x_0}^2+{y_0}^2 = 1$.

Solução: a) Considere um ponto (x_0,y_0) tal que ${x_0}^2+{y_0}^2 \neq 1$.

Se ${x_0}^2+{y_0}^2 < 1$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = {x_0}^2+{y_0}^2 = f(x_0,y_0)$.

Se ${x_0}^2+{y_0}^2 > 1$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,y_0)$.

Logo, f é contínua nos pontos (x_0,y_0) tais que ${x_0}^2+{y_0}^2 \neq 1$.

b) Considere, agora, um ponto (x_0,y_0) tal que ${x_0}^2+{y_0}^2 = 1$.

Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x^2+y^2<1)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2+y^2) = {x_0}^2+{y_0}^2 = 1 \tag{3.3}$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x^2+y^2>1)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0 = 0. \tag{3.4}$$

Como os limites obtidos em (3.3) e (3.4) são diferentes, concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe e, portanto, f não é contínua em (x_0, y_0). Um esboço de uma porção do gráfico de f pode ser visto na figura 3.10.

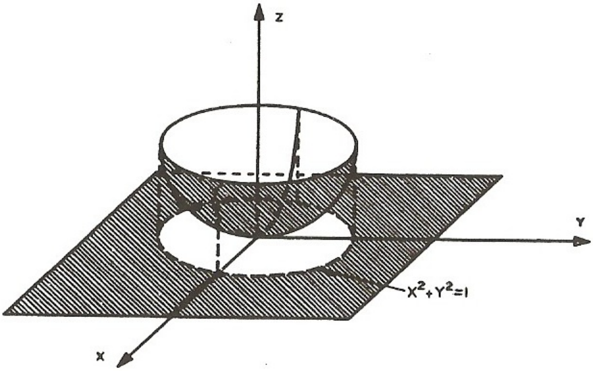


Figura 3.10

A soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas de várias variáveis são funções contínuas. Isto é conseqüência das propriedades, anteriormente mencionadas, de limite da soma, diferença, produto e quociente de funções de várias variáveis.

§3.4 Exercícios

1. Calcule os limites abaixo, usando as propriedades de limite.

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y} \quad ; \quad b) \lim_{(x,y,z)\to(0,-1,0)} \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. Determine se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe nos seguintes casos:

$$a) f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, (x_0,y_0) = (0,0) \qquad b) f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2}, (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$c) f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x_0,y_0) = (0,0) \quad d) f(x,y) = \frac{xy}{y-2x}, (x_0,y_0) = (1,2).$$

Para as funções a), b) e c) deste exercício, defina $f(0,0) = 0$. Estude a continuidade de f em (0,0), nos três casos.

3. Mostre que $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ não existe nos seguintes casos:

$$a)\ f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad b)\ f(x,y,z) = \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}.$$

4. Discuta a continuidade das funções abaixo:

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^8+y^4} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

§3.5 Derivadas parciais e Diferenciabilidade

Se $y = f(x)$ é uma função real de uma variável real, sua derivada é definida por

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. No caso de uma função $z = f(x,y)$ de duas variáveis independentes, necessitamos de uma definição semelhante que determine a taxa com que z muda quando x e y variam. O procedimento é fazer com que apenas uma variável varie de cada vez, enquanto a outra é mantida constante. Especificamente, para funções de várias variáveis, derivamos em relação a apenas uma variável por vez, considerando todas as outras como constantes.

Definição 3.5: Sejam $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais e (x_0, y_0) um ponto do domínio de f. A **derivada parcial de f em relação a x no ponto** (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

As notações mais usadas para representar esta derivada parcial são: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, f_x, z_x.

Analogamente, a **derivada parcial de f em relação a y no ponto** (x_0, y_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

se este limite existir.

As notações mais usadas para representar esta derivada parcial são: $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, f_y, z_y.

Segue da definição 3.5 que para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x,y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Por outro lado, para se calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, fixa-se $x = x_0$ em $z = f(x,y)$ e calcula-se a derivada de $h(y) = f(x_0, y)$ em $y = y_0$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0)$.

Exemplo 3.15: Seja $z = f(x,y) = \text{arctg } (x^2 + y^2)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

Solução: Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$, devemos considerar y como constante e derivar $z = \text{arctg } (x^2 + y^2)$ em relação a x; logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

Considerando x como constante e derivando $z = \text{arctg } (x^2+y^2)$ em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

Exemplo 3.16: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Determine:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Solução: a) Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1.$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^3-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{1}{\Delta y}.$$

Como $\displaystyle\lim_{\Delta y \to 0} -\frac{1}{\Delta y}$ não existe, concluímos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe. Segue que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0).$$

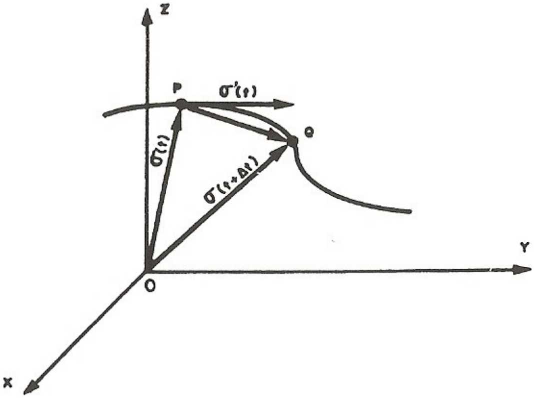


Figura 1.8

Exemplo 1.7: Seja $\sigma(t)$ uma função vetorial diferenciável num intervalo I.Mostre que se o comprimento do vetor $\sigma(t)$ é constante em I,então $\sigma(t) \cdot \sigma'(t) = 0$ em I.Em outras palavras,$\sigma(t)$ e $\sigma'(t)$ são ortogonais em I.

Solução : Por hipótese,

$$\|\sigma(t)\|^2 = a^2,$$

para algum $a \geq 0$.Fazendo $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a última equação se escreve

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = a^2.$$

Derivando implicitamente esta equação em relação a t, obtemos

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0,$$

isto é,

$$\sigma(t) \cdot \sigma'(t) = 0.$$

A interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis é análoga àquela para função de uma variável real. O gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície de equação $z = f(x, y)$. Seja (x_0, y_0) um ponto no plano xy e $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o ponto correspondente na superfície. Manter y fixo igual a y_0 significa interceptar a superfície pelo plano $y = y_0$. A interseção é uma curva de equação $z = f(x, y_0)$ neste plano. O número $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva quando $x = x_0$. Assim, na figura 3.11, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Analogamente, a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ é a curva de equação $z = f(x_0, y)$ e o número $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente a esta curva quando $y = y_0$. Na figura 3.11,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

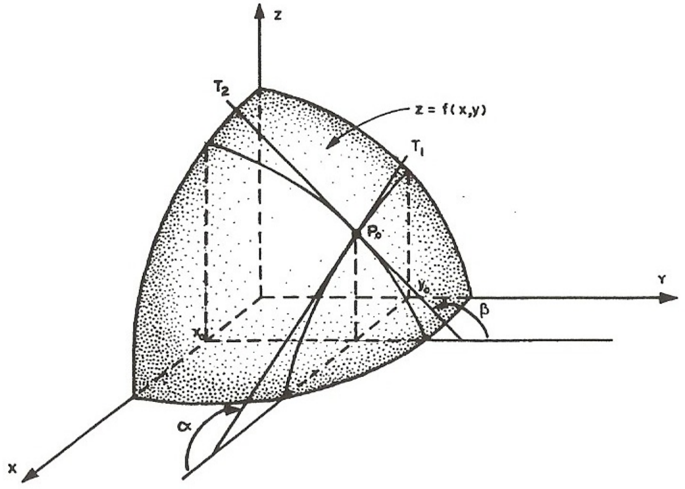


Figura 3.11

Agora, estendamos o conceito de derivada parcial para funções de três variáveis reais.

Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função e (x_0, y_0, z_0) um ponto pertencente ao domínio de f. A derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0, z_0) é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z},$$

se estes limites existirem.

Exemplo 3.17: Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y, z) = xe^{x-y+z}$.

Solução: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, devemos considerar y e z como constantes e derivar $f(x, y, z) = xe^{x-y+z}$ em relação a x; logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{x-y+z} + xe^{x-y+z}.$$

Considerando x e z como constantes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -xe^{x-y+z}.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xe^{x-y+z}.$$

De maneira intuitiva, podemos dizer que uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se existe uma reta não vertical passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ que se confunde com o gráfico de f " nas proximidades " do ponto $(x_0, f(x_0))$.

Esta idéia intuitiva pode ser traduzida analiticamente como passamos a descrever.

Uma função $f : U \subset I\!R \to I\!R$ é diferenciável em $x_0 \in U$ se, e só se, existe uma reta de equação $L(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, m =constante real, tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - m\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Conseqüentemente, f é diferenciável em x_0 se, e só se, $f'(x_0)$ existe; neste caso, $f'(x_0) = m$.

Observe que a diferença $E(x) = f(x) - L(x)$ é o erro cometido ao se calcular o valor aproximado de $f(x)$ na reta $L(x)$. Logo, dizer que uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 significa que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{E(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 0$, ou seja, o erro na aproximação de $f(x)$ pela reta $L(x)$ tende a zero mais rapidamente do que x tende a x_0, quando x tende a x_0.

Novamente, de modo intuitivo, podemos dizer que uma função de duas variáveis x e y é diferenciável em (x_0, y_0) se existe um plano não vertical contendo $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de equação $z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ que se confunde com o gráfico de f " nas proximidades " de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Estamos, agora, em condições de definir diferenciabilidade para funções de duas variáveis reais.

Definição 3.6: Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto aberto* $U \subset I\!R^2$ e $(x_0, y_0) \in U$. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se, e só

---

*Um conjunto $U \subset I\!R^n$ é dito **aberto** se para todo $X \in U$ existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(X) \subset U$.

se, existem constantes reais a e b tais que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

onde $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \underbrace{(f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y)}_{T(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}$.

O teorema a seguir mostra que, como no caso de funções de uma variável, **diferenciabilidade implica continuidade.**

Teorema 3.1: *Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então $z = f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0).*

Demonstração : Se f é diferenciável em (x_0,y_0), então existem constantes a e b tais que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

onde $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - a\Delta x - b\Delta y$.

Como

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \|(\Delta x, \Delta y)\| \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

e

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (a\Delta x + b\Delta y) = 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= \\ \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y + E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)) &= f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Isto mostra que f é contínua em (x_0,y_0).

Teorema 3.2: *Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então $z = f(x, y)$ possui derivadas parciais em (x_0, y_0).*

Demonstração: Como f é diferenciável em (x_0, y_0), existem constantes a e b tais que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0, \tag{3.5}$$

onde $E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - a\Delta x - b\Delta y.$

Segue de (3.5) que

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0)}{\|(\Delta x, 0)\|} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - a\Delta x}{|\Delta x|} = 0.$$

Daí,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} - a = 0$$

e, portanto,

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Analogamente, obtém-se $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

O teorema 3.2 prova que se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são os únicos números reais para os quais o limite (3.5) é nulo.

Observação 3.1:

1. Segue do teorema 3.1 que se $z = f(x, y)$ não é contínua em (x_0, y_0), então $z = f(x, y)$ não é diferenciável em (x_0, y_0).

2. Segue do teorema 3.2 que:

i) se alguma das derivadas parciais se $z = f(x,y)$ não existir em (x_0, y_0), então $z = f(x,y)$ não é diferenciável em (x_0, y_0).

ii) para provar que uma função $z = f(x,y)$ é diferencivel em (x_0, y_0), é suficiente provar que $z = f(x,y)$ admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0, \tag{3.6}$$

onde $E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$.

Exemplo 3.19: Mostre que $f(x,y) = x^2 + y^2$ é uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

Solução: Devemos mostrar, primeiramente, que $f(x,y)$ tem derivadas parciais para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Agora, devemos mostrar que (3.6) é verdadeira. Como

$$\begin{aligned} E(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \\ &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 - 2x\Delta x - 2y\Delta y = \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \end{aligned}$$

temos

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = $$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0.$$

Isto prova que $f(x,y)$ é diferenciável $\forall (x,y) \in I\!R^2$.

Exemplo 3.20: A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$

é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

Solução: No exemplo 3.11, vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe; portanto, $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$. Logo, $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Note que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem.

Exemplo 3.21: A função $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ é diferenciável em $(0,0)$?

Solução: A função $f(x,y)$ admite derivadas parciais em $(0,0)$, a saber:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Por outro lado,

$$E(\Delta x,\Delta y) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y =$$
$$= (\Delta x)^{\frac{1}{3}}(\Delta y)^{\frac{1}{3}}.$$

Logo,

$$\frac{E(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}(\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Como

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{E(\Delta x,\Delta x)}{\|(\Delta x,\Delta x)\|} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{(2(\Delta x)^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}|\Delta x|^{\frac{1}{3}}} = +\infty,$$

segue que $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$ (a figura 3.12 descreve uma porção do gráfico de f).

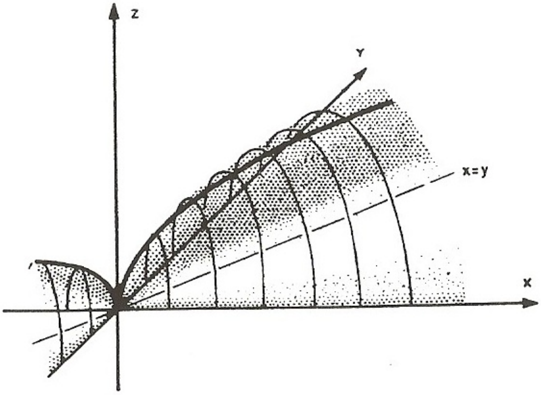


Figura 3.12

O teorema a seguir prova que a continuidade das derivadas parciais de uma função num ponto garante a diferenciabilidade da função neste ponto.

Teorema 3.3: *Sejam* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *U aberto em* $\mathbb{R}^2$, *e* $(x_0, y_0) \in U$. *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existem numa bola aberta* $\mathcal{B}_r(x_0,y_0) \subset U$ *e são contínuas em* $P_0 = (x_0, y_0)$, *então f é diferenciável em* $P_0 = (x_0, y_0)$.

Demonstração: Devemos mostrar que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0, \text{ onde}$$

$$E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y.$$

Sejam Δx e Δy tais que $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in \mathcal{B}_r(x_0,y_0)$. Temos

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $G(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$, existe $\overline{x}$ entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ tal que

$$G(x_0 + \Delta x) - G(x_0) = G\,'(\overline{x})\Delta x,$$

isto é,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y)\Delta x.$$

Do mesmo modo, existe $\overline{y}$ entre y_0 e $y_0 + \Delta y$ tal que

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y})\Delta y.$$

Assim,

$$E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y})\Delta y - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y,$$

o que fornece

$$\begin{aligned}\frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\right| &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \\ &+ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1$ e $\dfrac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1$, obtemos

$$\left|\frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|}_{(*)} + \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right|}_{(**)}.$$

Pela continuidade das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0, y_0), as expressões $(*)$ e $(**)$ acima tendem a zero, quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Logo,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

provando que f é diferenciável em (x_0, y_0).

Observação 3.2: A recíproca do teorema 3.3 não é verdadeira, ou seja, existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas nesse ponto. O exercício 9 da seção 3.6 nos dá um exemplo em que isto ocorre.

Definição 3.7: Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano de equação

$$z = T(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (3.7)$$

é chamado **plano tangente** ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

A equação (3.7) pode ser escrita, em notação de produto escalar, da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Segue daí que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

$$N(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

A reta que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor $N(x_0, y_0)$ é chamada **reta normal** ao gráfico da função f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, e sua equação é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)\ ,\ t \in I\!R. \quad (3.8)$$

Observe que só definimos plano tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no caso em que f é diferenciável em (x_0, y_0). Se f não é diferenciável em (x_0, y_0), mas admite derivadas parciais neste ponto, então o plano de equação (3.7) existe, mas não é necessariamente tangente ao gráfico (como mostra o exemplo 3.21).

Exemplo 3.22: Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $P_0 = (3, 4, -3)$.

Solução: Se $(x, y) \neq (0, 0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

que são contínuas em $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Logo, pelo teorema 3.3, f é diferenciável em $(3, 4)$. A equação do plano tangente é dada por

$$z = -3 + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4)(y - 4),$$

isto é,

$$z = -3 - \frac{3}{5}(x-3) - \frac{4}{5}(y-4).$$

A equação da reta normal ao gráfico de f em P_0 é

$$(x,y,z) = (3,4,-3) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,4), \frac{\partial f}{\partial y}(3,4), -1\right)\ ,\ t \in I\!R,$$

ou seja,

$$(x,y,z) = (3,4,-3) + t(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1)\ ,\ t \in I\!R.$$

O conceito de diferenciabilidade pode ser estendido às funções de 3 variáveis, como veremos a seguir.

Definição 3.8: Sejam $f : U \subset I\!R^3 \to I\!R$, U aberto em $I\!R^3$, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$. Dizemos que f é **diferenciável** em P_0 se, e só se, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ existem em P_0 e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}{\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|} = 0,$$

onde $E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) =$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\Delta z.$$

Os teorema 3.1 e 3.3 podem ser estendidos às funções de 3 variáveis.

Definição 3.9: Uma função real f de n variáveis reais é dita de classe C^1 em P_0 se, e só se, f possui derivadas parciais numa bola aberta $\mathcal{B}_r(P_0)$ e tais derivadas parciais são contínuas em P_0.

Observe que toda função f de classe C^1 em P_0 é diferenciável em P_0.

§3.6 Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, encontre as derivadas parciais indicadas.

1. $f(x,y) = 3xy + 6x - y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

2. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3. $f(x,y) = e^{\left(\frac{y}{x}\right)} \ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $f_y(x,y)$.

4. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \ln(\operatorname{sen} t)\,dt$, $f_x(x,y)$.

5. $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$, $f_y(x,y,z)$.

6. $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

7. Encontre a inclinação da reta tangente à curva de interseção do gráfico de $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$ com o plano $y = 4$ no ponto $(3,4,2)$.

8. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0,0)$.

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cos y$.

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.

c) Mostre, usando a definição, que f é diferenciável em $(0,0)$.

d) Mostre que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

10. Encontre o ponto onde o plano tangente a cada uma das superfícies, de equação abaixo, é horizontal.

a) $z = 2x^2 + 2xy - y^2 - 5x + 3y - 2$.

b) $z = x^2y^2 + 2(x - y)$.

11. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy + 4x + 2$ que é paralelo ao plano xy.

12. Considere a superfície S de equação $z = 2x^2 + 2y^2$.

a) Determine o ponto $P_0 \in S$ tal que o plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = (0, 1, -\frac{1}{6})$.

b) Escreva a equação do plano tangente referido no item a).

13. Considere a superfície do parabolóide de equação $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25}$.

a) Encontre uma equação do plano tangente ao parabolóide no ponto $P_0 = (6, 10, 8)$.

b) Este parabolóide deve ser apoiado em uma viga presa ao eixo z, de tal modo que esta fique tangente à superfície em P_0. Calcule o comprimento da viga.

14. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule o comprimento do segmento da reta normal ao gráfico da f compreendida entre o ponto $(3,-4,5)$ e o plano xy.

15. Seja S a superfície de equação $z = \dfrac{2-x^2-xy+y^2}{4}$.

a) Determine o ponto $P_0 \in S$ no qual o plano tangente à S é perpendicular à reta L de equação $\sigma(t) = (1-t, -3t, 2t+1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Escreva as equações da reta normal à S que é paralela à reta L.

§3.7 Regra da cadeia e Vetor gradiente

Na seção 1.3 provamos a regra da cadeia (teorema 1.1) para funções vetoriais de uma variável. Nosso objetivo nesta seção é estendê-la às funções vetoriais de várias variáveis. Inicialmente, estabeleçamos o seguinte:

Teorema 3.4: *Sejam $z = f(x,y)$ uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, tal que $\sigma(I) \subset U$. Se $\sigma(t)$ é diferenciável em $t_0 \in I$, e $f(x,y)$ é diferenciável em $\sigma(t_0) = (x_0, y_0)$, então a função composta $z(t) = f(\sigma(t))$, $t \in I$, é diferenciável em t_0 e*

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\,\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\,\frac{dy}{dt}(t_0). \tag{3.9}$$

Demonstração: Como f é diferenciável em (x_0, y_0), temos

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) \\ &\quad + E(x,y), \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\lim\limits_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\to 0} \dfrac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$

Portanto, a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} & , (x,y) \neq (x_0,y_0), \\ 0 & , (x,y) = (x_0,y_0), \end{cases}$$

é contínua em (x_0, y_0).

Assim, dividindo ambos os lados de (3.10) por $t - t_0$, $t \neq t_0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t - t_0} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \\ &+ g(\sigma(t))\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0} = \left\| \frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0} \right\| \frac{|t-t_0|}{t-t_0}.$$

Como $\lim\limits_{t\to t_0} g(\sigma(t)) = 0$ e como a função $\dfrac{|t-t_0|}{t-t_0}$ é limitada, temos

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{|t-t_0|}{t-t_0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to t_0} \left\| \frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0} \right\| = \|\sigma'(t_0)\|.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t-t_0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\,\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\,\frac{dy}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema continua válida se substituirmos a função f de duas variáveis por uma função f de n variáveis.

Exemplo 3.23: Sejam $z = f(x, y) = x^3y^2$, $x(t) = e^{-t}$ e $y(t) = t \operatorname{sen} t$. Calcule $\frac{dz}{dt}(t)$.

Solução: Da equação (3.9) temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2x^3y$, $\frac{dx}{dt}(t) = -e^{-t}$ e $\frac{dy}{dt}(t) = \operatorname{sen} t + t \cos t$, temos

$$\frac{dz}{dt}(t) = -3e^{-3t}t^2 \operatorname{sen}^2 t + 2e^{-3t}t \operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t + t \cos t).$$

Exemplo 3.24: A temperatura de $T(x, y)$ graus centígrados em cada ponto (x, y) de uma chapa de metal não varia com o tempo. Um besouro atravessando a chapa está em $(x, y) = (t^2 + 1, 3t)$ no instante t. A temperatura tem as propriedades: $T(5, 6) = 40$, $T_x(5, 6) = 4$ e $T_y(5, 6) = -2$. Qual a taxa de variação desta temperatura em relação ao tempo no instante $t = 2$?

Solução: A temperatura em cada instante é $z(t) = T(x(t), y(t))$, onde $x(t) = t^2 + 1$ e $y(t) = 3t$.

Logo, por (3.9),

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(2) &= T_x(x(2), y(2))\,\frac{dx}{dt}(2) + T_y(x(2), y(2))\,\frac{dy}{dt}(2) = \\ &= T_x(5, 6)\,4 + T_y(5, 6)\,3 = \\ &= 16 - 6 = 10.\end{aligned}$$

Exemplo 3.25: Sejam $f(x, y)$ uma função diferenciável num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, $g(x, y)$ e $h(x, y)$ funções diferenciáveis num conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$

tais que, para todo $(u,v) \in V$, $(x,y) = (g(u,v), h(u,v)) \in U$. Considere

$$F(u,v) = f(g(u,v), h(u,v)) \ , \ (u,v) \in V.$$

Mostre que:

i) $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$,

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$,

onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculadas no ponto $(g(u,v), h(u,v))$.

Solução: $F(u,v) = f(x,y)$, onde $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$.

(i) Para calcular $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, consideramos v constante; logo, x e y dependem apenas da variável u. Portanto, da equação (3.9) segue que

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),$$

onde $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$.

De modo análogo obtemos (ii), considerando agora u constante.

Exemplo 3.26: Seja $F(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, onde $f(x,y,z) == x^2 + y^2 - z$, $x(u,v,w) = u^2 v$, $y(u,v,w) = v^2$ e $z(u,v,w) = e^{-uw}$.

Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ de dois modos: determinando a função composta $F(u,v,w)$ e derivando em relação a u e usando a regra da cadeia.

Solução : Temos

$$F(u,v,w) = (u^2 v)^2 + (v^2)^2 - e^{-uw} = u^4 v^2 + v^4 - e^{-uw}.$$

Derivando em relação a u, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w) = 4u^3 v^2 + w e^{-uw}.$$

Por outro lado, usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ são calculadas em $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w) &= 2x(2uv) + 2y0 + 1we^{-uw} = \\ &= (2u^2v)(2uv) + we^{-uw}, \end{aligned}$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

Definição 3.10: Seja f uma função de n variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que possui derivadas parciais no ponto $P_0 = ({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0)$. **O vetor gradiente de f em $\mathbf{P_0}$**, denotado por $\nabla f(P_0)$, é o vetor

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right).$$

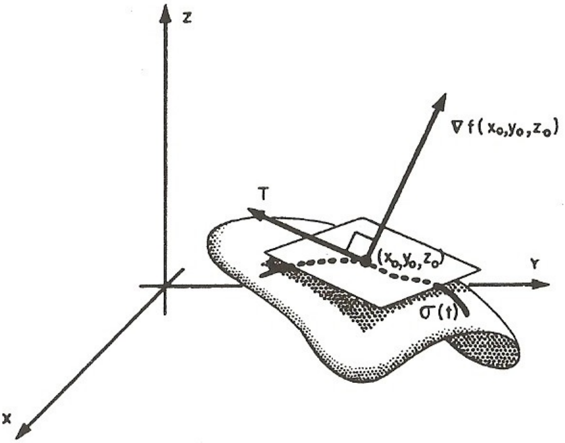
Usando a definição de vetor gradiente, a equação (3.9) pode ser escrita na forma

$$\frac{dz}{dt}(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \ ,$$

onde $\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f(\sigma(t))$ e $\sigma'(t)$.

O teorema a seguir nos dá uma interpretação geométrica para o vetor gradiente de uma função de três variáveis.

Teorema 3.5: *Sejam $w = f(x,y,z)$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset I\!R^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Se S é a superfície de nível de equação $f(x,y,z) = k$ ($k =$ constante) que contém P_0, então $\nabla f(P_0)$ é* **normal** *a S em P_0, ou seja, $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente a S em P_0* (figura 3.13).



Interpretação geométrica do vetor gradiente

Figura 3.13

Para demonstrar o teorema 3.5 precisamos do seguinte:

Lema 3.1: Sejam $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em (x_0, y_0) e S o gráfico da função $f(x, y)$. Se T é um vetor não nulo tangente a S em $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, então existe uma curva $\sigma(t)$, contida em S e diferenciável em t_0, tal que $\sigma(t_0) = P_0$ e $\sigma'(t_0) = T$.

Demonstração: A curva de interseção de S com o plano $y = y_0$ pode ser parametrização dada por $u(t) = (t, y_0, f(t, y_0))$; logo, $u'(x_0) = (1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ é um vetor tangente a S em P_0.

Por outro lado, a curva de interseção de S com o plano $x = x_0$ pode ser parametrização dada por $v(t) = (x_0, t, f(x_0, t))$ e, então, $v'(y_0) = (0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ é também um vetor tangente a S em P_0.

Como os vetores $u'(x_0)$ e $v'(y_0)$ são linearmente independentes, eles geram o plano tangente a S em P_0. Portanto, se T é um vetor não nulo tangente a S em

P_0, então $T = au'(x_0)+bv'(y_0)$, onde a e b são constantes não simultaneamente nulas.

Tomando

$$\sigma(t) = (x_0 + a(t-t_0), y_0 + b(t-t_0), f(x_0 + a(t-t_0), y_0 + b(t-t_0))),$$

temos que $\sigma(t_0) = P_0$, $\sigma(t)$ é diferenciável em t_0 e $\sigma'(t_0) = T$.

Demonstração do Teorema 3.5: Como $\nabla f(P_0) \neq 0$, podemos supor que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita (Apêndice, seção A.2), numa vizinhança do ponto P_0 S é o gráfico de uma função de classe C^1, $z = h(x,y)$, onde $z_0 = h(x_0, y_0)$.

Dado T um vetor não nulo tangente a S em P_0, o lema 3.1 garante a existência de uma curva parametrizada por $\sigma(t)$ contida em S tal que $\sigma(t_0) = P_0$ e $T = \sigma'(t_0)$.

Visto que $\sigma(t)$ está contida em S, então

$$f(\sigma(t)) = k.$$

Derivando esta equação em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}(f(\sigma(t))) = 0.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\left.\frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))\right|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \sigma'(t_0),$$

isto é,

$$\nabla f(P_0) \cdot T = 0.$$

O teorema 3.5 nos permite definir plano tangente a uma superfície de nível S, como veremos a seguir.

Definição 3.11: Sejam S uma superfície de nível de equação $f(x, y, z) = k$ ($k =$ constante) e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de S. Se $f(x, y, z)$ é de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset I\!\!R^3$ tal que $P_0 \in U$ e $\nabla f(P_0)$ é não nulo, definimos o **plano tangente a S em $\mathbf{P_0}$** pela equação

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{3.11}$$

Além disso, a reta de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(P_0) \quad , \lambda \in I\!\!R, \tag{3.12}$$

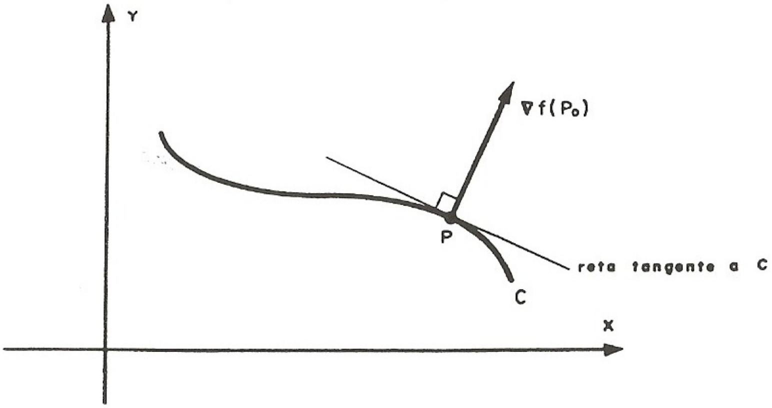
denomina-se **reta normal a S em $\mathbf{P_0}$**.

Esta definição é uma extensão da definição de plano tangente e reta normal a uma superfície que é gráfico de uma função de duas variáveis (exercício 14, seção 3.8).

O teorema 3.5 se aplica às funções de duas variáveis. Neste caso, temos que: Se $z = f(x, y)$ é de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset I\!\!R^2$ que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, o vetor $\nabla f(P_0)$ é não nulo e C é a curva de nível $f(x, y) = k$ ($k =$ constante) que contém P_0, então o vetor $\nabla f(P_0)$ é normal à curva C em P_0 " (figura 3.14).

Uma equação para a reta tangente a C em P_0 é

$$\nabla f(P_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$



Interpretação geométrica do vetor gradiente

Figura 3.14

Exemplo 3.27: Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S de equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

Solução: A superfície S é uma superfície de nível da função de classe C^1 $F(x, y, z) = = x^2 + 3y^2 + 4z^2$. Temos $\nabla F(x, y, z) = (2x, 6y, 8z)$; assim, $\nabla F(1, -1, 1) = (2, -6, 8)$. Da equação (3.11) segue que a equação do plano tangente é

$$2(x-1) - 6(y+1) + 8(z-1) = 0,$$

ou seja,

$$2x - 6y + 8z = 16.$$

Por (3.12), uma equação da reta normal é

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8)\ ,\ \lambda \in I\!R.$$

No exemplo a seguir obteremos uma equação para a reta tangente a uma curva C, interseção de duas superfícies de nível num ponto P_0.

Exemplo 3.28: Seja C a curva de interseção de duas superfícies S_1 e S_2 de equações $F(x,y,z)=0$ e $G(x,y,z)=0$, respectivamente. Se F e G são de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset I\!R^3$ que contém o ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0) \in C$, encontre uma equação para a reta tangente a C em P_0.

Solução: Se $N_1 = \nabla F(P_0) \neq 0$ e $N_2 = \nabla G(P_0) \neq 0$, então N_1 e N_2 são normais às superfícies S_1 e S_2 em P_0, respectivamente.

Como a reta tangente a C em P_0 está contida em cada um dos planos tangentes às superfícies S_1 e S_2 em P_0, ela é a interseção destes dois planos tangentes. Portanto, N_1 e N_2 são ortogonais à reta tangente a C em P_0.

Assim, como o produto vetorial de N_1 por N_2, denotado por $N_1 \times N_2$,é não nulo, temos que o vetor $N_1 \times N_2$ tem a mesma direção do vetor tangente a C em P_0. Logo, uma equação para a reta tangente a C em P_0 é dada por

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0))\ ,\ \lambda \in I\!R. \tag{3.13}$$

§3.8 Exercícios

Nos exercícios 1 e 2, calcule $\dfrac{dz}{dt}$ de dois modos:

a) usando a regra da cadeia; b) determinando a função composta $z(t)$ e derivando em relação a t.

1. $z = ye^x + xe^y\ ,\ x=\cos t\ ,\ y = \text{sen t}.$

2. $z=(x^2+y^2)\ln\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ x=e^t\ ,\ y=e^{-t}.$

Nos exercícios 3 e 4, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ de dois modos:

a) usando a regra da cadeia; b) determinando a função $z(u,v)$ e derivando em relação a u e a v.

3. $z = x^2y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = ue^v$.

4. $z = x^2 + y^2$, $x = u \operatorname{sen} v$, $y = v \cos u$.

5. Seja $z = xy$, onde $x = f(u)$ e $y = g(u)$. Supondo f e g diferenciáveis, $f(1) = 2$, $g(1) = -2$, $\dfrac{dx}{du}(1) = -1$ e $\dfrac{dy}{du}(1) = 5$, calcule $\dfrac{dz}{du}(1)$.

6. Suponha que $z = f(x, y)$ é uma função de classe C^1, $f(1, 3) = -1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = 4$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = -3$. Sabe-se que a curva de equação $\sigma(t) = (t^2, 4t - 1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, está contida no gráfico da função $z = f(x, y)$.

a) Calcule $\dfrac{dz}{dt}(t)$.

b) Ache uma equação da reta tangente à curva $\sigma(t)$ no ponto $\sigma(1)$.

c) Mostre que a reta encontrada no item b) está contida no plano tangente ao gráfico da função $z = f(x, y)$ em $(1, 3, -1)$.

7. Considere a função diferenciável $f(x, y)$, onde $x = g(u, v) = v\cos(\pi + u) + e^{uv}$ e $y = h(u, v) = u^2 - v^2$. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1, -4) = 2$, determine $\dfrac{\partial F}{\partial u}(0, 2)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0, 2)$ da função $F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v))$.

8. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $P_0 = (0, 0, 0)$ tais que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$. Defina $g(u, v) = f(u - v, u^2 - 1, 3v - 3)$ e calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(1, 1)$.

9. Este exercício nos dá um exemplo de que a regra da cadeia não se aplica quando a função $f(x, y)$ não é diferenciável.

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Se $g(t) = (at, bt)$, $a, b \neq 0$, então $f \circ g$ é diferenciável em $t = 0$, $(f \circ g)'(0) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \neq 0$ mas $\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0$.

10. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperbolóide de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$ no ponto $(4, -1, 1)$.

11. Determine o ponto, situado no primeiro octante, da superfície de equação $x^2 + 3y^2 + \dfrac{3z^2}{2} = 18$ no qual a reta normal é perpendicular ao plano $x + y + z = 10$.

12. Mostre que em todos os pontos da interseção da semiesfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, com o cone de equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$, os vetores normais a estas superfícies são ortogonais.

13. Considere o elipsóide de equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$. Encontre as equações dos planos tangentes a esta superfície que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 30$.

14. Seja $z = f(x,y)$ uma função de classe C^1. O gráfico de $f(x,y)$ pode ser considerado como uma superfície de nível de equação $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$. Mostre que as equações do plano tangente num ponto P obtidas nas definições 3.6 e 3.10 coincidem.

15. Uma peça de metal, com formato de um cone de equação $z^2 - \dfrac{x^2}{9} - y^2 = 0\,,\ z \geq 0$, deve ser apoiada por uma haste no ponto $P = (9, 4, 5)$, de modo que a haste fique perpendicular à superfície do cone.

a) Determine a equação do plano tangente ao cone no ponto P.

b) Considerando o plano $z = 0$ como o chão, qual o comprimento da haste desde o chão até a superfície ?

16. Considere a curva C de interseção das superfícies de equações $x^2 - 2xz + y^2z = 3$ e $3xy - 2yz = -2$. Determine:

a) Um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.

b) Os pontos do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$ onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item a).

17. Sejam S_1 e S_2 as superfícies definidas por $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $xy + xz = 2$, respectivamente.

a) Determine a equação do plano tangente a S_1 em $(1, 1, 1)$.

b) Determine equações da reta tangente à curva de interseção de S_1 e S_2 em $(1, 1, 1)$.

c) Mostre que a reta tangente encontrada no item b) é tangente à superfície de equação $xyz - x^2 - 6y + 6 = 0$ no ponto $(1, 1, 1)$.

§3.9 Derivada direcional

Nesta seção, generalizaremos o conceito de derivada parcial para obter a taxa de variação de uma função numa determinada direção.

Sejam $f(x, y)$ uma função de duas variáveis, $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do domínio de f e u um vetor não nulo no plano xy. O conjunto dos pontos $P_0 + tu\,,\ t \in I\!R$, é a reta L que contém P_0 e é paralela ao vetor u.

A derivada direcional de $f(x,y)$ em P_0 na direção de u, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$, é a taxa de variação de $f(x,y)$ em P_0 na direção de L. Geometricamente, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva C de equação $z = f(P_0 + tu)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (figura 3.15).

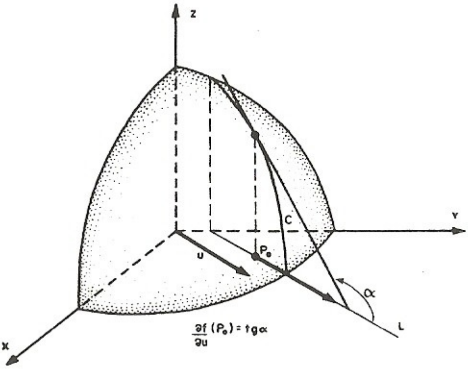

z
Y
X
C
u
P₀
α
L
$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \operatorname{tg}\alpha$

Figura 3.15

Mais precisamente, temos o seguinte :

Definição 3.12: A derivada direcional de uma função $z = f(x,y)$ em P_0 na direção do vetor u é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{t\|u\|},$$

se este limite existir.

Segue da definição 3.12 que as derivadas parciais de $f(x,y)$ em relação a x e a y em P_0 são as derivadas direcionais nas direções dos vetores $u = (1,0)$ e $v = (0,1)$, respectivamente.

Teorema 3.6: *Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}, \tag{3.14}$$

onde $\nabla f(P_0)\cdot\dfrac{u}{\|u\|}$ *é o produto escalar de* $\nabla f(P_0)$ *pelo vetor unitário na direção e sentido do vetor* u.

Demonstração: A diferenciabilidade de f em P_0 implica que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+tu)-f(P_0)-\nabla f(P_0)\cdot(tu)}{\|tu\|}=0,$$

o que equivale a

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(P_0+tu)-f(P_0)}{t\|u\|}-\nabla f(P_0)\cdot\frac{u}{\|u\|}\right|=0\,.$$

Isto, por sua vez, equivale a

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+tu)-f(P_0)}{t\|u\|}=\nabla f(P_0)\cdot\frac{u}{\|u\|}\,,$$

o que completa a demonstração.

A definição 3.12 pode ser estendida às funções f de três variáveis x, y e z,assim como o teorema 3.6.

Exemplo 3.29: Determine a taxa de variação de $f(x,y,z)=xyz+e^{2x+y}$ no ponto $P_0=(-1,2,1)$ na direção do vetor $u=(1,1,\sqrt{2})$.

Solução: As derivadas parciais da função f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz+2e^{2x+y}\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xz+e^{2x+y}\quad\text{e}\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=xy\,.$$

Como $f(x,y,z)$ é diferenciável em P_0, segue de (3.12) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(-1,2,1)&=\nabla f(-1,2,1)\cdot\frac{u}{\|u\|}&=\\&=(4,0,-2)\cdot\frac{(1,1,\sqrt{2})}{2}&=2-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Teorema 3.7: *Se f é uma função diferenciável em P_0 tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$, então o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o valor máximo.*

Demonstração: Segue de 3.12 que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \|\nabla f(P_0)\| \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta\,,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\nabla f(P_0)$ e u.

$\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ terá valor máximo quando $\theta = 0$, ou seja, quando u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, e seu valor máximo é $\|\nabla f(P_0)\|$.

Exemplo 3.30: Seja $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{x^2 + y^2 + 1}$. Determine:

a) A direção de maior variação de f e a taxa de maior variação da função no ponto $P = (1, 0, -1)$.

b) A taxa de variação de f no ponto $P = (1, 0, -1)$ na direção do vetor $u = \sigma'(t)$, onde $\sigma(t) = (t, 1 + 2t, -1 + t)$.

Solução: As derivadas parciais da função f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{z(-x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-2xyz}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}.$$

a) Como f é diferenciável em $P = (1, 0, -1)$ e $\nabla f(P) = (0, 0, \frac{1}{2}) \neq 0$, o teorema 3.7 garante que a direção de maior variação de f em P é a do vetor $u = (0, 0, \frac{1}{2})$ e a taxa de maior variação de f em P é $\|\nabla f(P)\| = \frac{1}{2}$.

b) Agora, $u = \sigma'(t) = (1, 2, 1)$, e usando 3.12 temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{u}{\|u\|} = (0, 0, \frac{1}{2}) \cdot \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

§3.10 Exercícios

Nos exercícios 1 a 4, encontre a derivada direcional no ponto P_0 na direção do vetor u, nos seguintes casos:

1.$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0 = (0,1)$, $u = (2,2)$.

2.$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $P_0 = (1,1)$, $u = (1,3)$.

3.$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $P_0 = (1,2,3)$, $u = (1,-1,-1)$.

4.$f(x,y,z) = \text{sen }(xy) + \cos(yz)$, $P_0 = (1,0,-1)$, $u = (-1,2,2)$.

5. Sejam $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$

e $u = (1,1)$.

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, usando a definição.

b) Calcule $\nabla f(0,0) \cdot \dfrac{u}{\|u\|}$.

c) Justifique porque os valores encontrados em a) e b) são diferentes.

6. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Mostre que:

a) $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

b) $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

c) $f(x,y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0,0)$.

7. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2,2)$. Determine:

a) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor $(1,1)$.

b) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor tangente $g'(t)$ à curva $g(t) = (t, t^2 - t)$ em $(3,6)$.

c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.

8. Encontre a derivada direcional de $f(x,y,z) = xe^{y^2-z^2}$ em $(1,2,-2)$ na direção do vetor tangente $\sigma'(t)$ à curva $\sigma(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$.

9.Considere as superfícies: S_1 de equação $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$, $2 \leq z \leq 4$,S_2 de equação $z = 3 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}$, $4 \leq x^2+y^2 \leq 12$ e S_3 de equação $z = -6 + \sqrt{3(x^2+y^2)}$, $x^2+y^2 \leq 12$. Sendo S a união das superfícies S_1, S_2 e S_3, calcule a derivada direcional da função $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ no ponto $P_0 = (2,2,1)$ na direção de um vetor normal a S em P_0.

10. Uma chapa de metal aquecida está situada no plano xy de tal modo que a temperatura em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. A temperatura em $(3,4)$ é de 100 graus. Suponha que os eixos positivos $0x$ e $0y$ apontam, respectivamente, para leste e norte. Um objeto se encontra no ponto $P_0 = (2,2)$.

a) Se o objeto se mover para nordeste, ele aquecerá ou esfriará? E para sudeste? Justifique.

b) Se o objeto se mover na direção do vetor $(-1,-1)$, ele aquecerá ou esfriará? Com que taxa?

c) Se a velocidade com que o objeto se move na direção do item b) é de $\dfrac{1}{5}$ m/s, calcule a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo no ponto P_0.

d) Na direção e sentido de que vetores o objeto deve se mover, a partir de P_0, para que sua temperatura permaneça constante?

11. As superfícies de equações

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \ \text{ e } \ G(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 4 = 0$$

têm como interseção uma curva C que passa pelo ponto $P_0 = (1,1,1)$.

a) Encontre as taxas de variação de F e G na direção de um vetor tangente a C em P_0.

b) Encontre a direção na qual a taxa de variação de G em P_0 é máxima. Qual é esta taxa?

12. O Capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1,1,1)$, e a temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ graus.

a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível?

b) Se a espaçonave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item a)?

c) Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}\,e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0, com a velocidade do item b)?

§3.11 Derivadas parciais de ordem superior

Nesta seção introduziremos as derivadas parciais de ordem superior de funções de duas ou três variáveis, que desempenharão papel relevante no capítulo 4. O objetivo principal é provar o teorema que atesta a igualdade das " derivadas parciais mistas " para funções de duas variáveis.

Vimos na seção 3.5 como definir as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, sendo $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis.

Da mesma forma, podemos agora definir as derivadas parciais das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, obtendo quatro novas funções que são chamadas **derivadas parciais de segunda ordem de f**, a saber:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\Delta x},$$

se este limite existir;

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\Delta y},$$

se este limite existir;

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x},$$

se este limite existir;

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta y},$$

se este limite existir;

As definições das derivadas parciais de segunda ordem de funções de três variáveis são análogas.

Exemplo 3.31: Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x,y) = = xy - e^x \cos y$.

Solução: As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - e^x \cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + e^x \operatorname{sen} y.$$

Derivando estas funções em relação a x e y, obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1 + e^x \operatorname{sen} y\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 + e^x \operatorname{sen} y\,.$$

Exemplo 3.32: Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ da função $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

Solução: Derivando a função em relação a x e z, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Derivando estas funções em relação a z e x,obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Notemos que, no exemplo 3.31, as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ coincidem, assim como $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ são iguais no exemplo 3.32. Este fato nem sempre se verifica, como mostra o exercício 5 da seção 3.12. O teorema a seguir nos dá uma condição que garante a igualdade das derivadas parciais mistas.

Pela definição 3.9 uma função f é de classe C^1 quando suas derivadas parciais são contínuas. Se as derivadas parciais de segunda ordem de f são contínuas, dizemos que f **é de classe C^2**.

Provaremos o teorema a seguir para funções de duas variáveis, mas a demonstração pode ser facilmente adaptada para funções de várias variáveis.

Teorema 3.8: *Se $z = f(x, y)$ é de classe C^2, então suas derivadas mistas são iguais, isto é,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demonstração: Tomemos um ponto (x_0, y_0) no domínio de f. Se fixarmos Δy, e definirmos a função

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)\,,$$

temos que $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ é igual à expressão

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \quad (3.15)$$

Aplicando o teorema de valor médio para funções de uma variável à função g, obtemos que $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(\overline{x})\Delta x$, para algum $\overline{x}$ entre x_0 e $x_0 + \Delta x$.

Portanto, a expressão 3.15 é igual a

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0)\right] \Delta x\,.$$

Aplicando o teorema do valor médio, agora à função $h(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)$, temos que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0)\right] \Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y})\Delta x \Delta y\,,$$

para algum $\overline{y}$ entre y_0 e $y_0 + \Delta y$, ou seja, a expressão 3.15 é igual a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y})\Delta x \Delta y$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é contínua em (x_0, y_0), segue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \, .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \; &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \right. \\ &\left. - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0) \right] \, . \end{aligned} \tag{3.16}$$

De modo análogo, mostramos que o limite que aparece à direita da igualdade (3.16) também é igual a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, o que prova o teorema.

§3.12 Exercícios

Nos exercícios 1 a 4, calcule as derivadas parciais indicadas.

1.$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, $a) f_{xx}(x, y)$, $b) f_{yx}(x, y)$.

2.$f(x, y) = x \cos y - y e^x$, $a) f_{yy}(x, y)$, $b) f_{xy}(x, y)$.

3.$f(x, y, z) = \ln(x^2 + 8y - 3z^2)$, $a) f_{xx}(x, y, z)$, $b) f_{zy}(x, y, z)$.

4.$f(x, y, z) = y^2 z + \text{ sen } (x^2 z)$, $a) f_{xz}(x, y, z)$, $b) f_{yzx}(x, y, z)$.

5.Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6. Se $f(x,y) = \ln(x-y) + \text{ tg } (x+y)$, mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

7. Se $f(x,y) = xye^{\frac{x}{y}}$, mostre que $x\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 0$.

8. Mostre que as funções

   a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

   b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

satisfazem às respectivas **equações de Laplace**:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

(Uma função que satisfaz a equação de Laplace é dita **harmônica** .)

9. Se u e v são funções de x e y, de classe C^2, e satisfazem as **equações de Cauchy-Riemann** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, mostre que u e v são harmônicas.

10. Seja $u(x,y) = f(x-ay) + g(x+ay)$, onde a é uma constante real e f e g são funções quaisquer de uma variável real, deriváveis até a segunda ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

CAPÍTULO 4

MÁXIMOS E MÍNIMOS

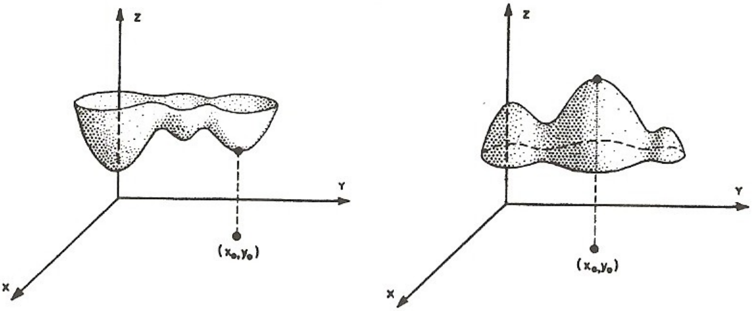
O cálculo dos valores máximo e mínimo de uma função real de várias variáveis é relevante, na medida em que contribui para a compreensão do comportamento da função.

§4.1 Valores extremos de funções de duas variáveis

Definição 4.1: Consideremos a função real $z = f(x, y)$ definida num conjunto $D \subset I\!R^2$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um **valor máximo relativo** de f (resp. **valor mínimo relativo** de f) se existe uma bola aberta $B = \mathcal{B}_r(x_0, y_0) \subset D$ tal que

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp.} f(x,y) \geq f(x_0, y_0)) ,$$

para todo (x, y) pertencente a B. Um valor máximo ou mínimo relativo de f é chamado **valor extremo relativo**. O ponto (x_0, y_0) onde f assume um valor extremo relativo é dito **ponto extremo relativo**.



(i) (ii)

(i) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo relativo

(ii) (x_0, y_0) é um ponto de máximo relativo

Figura 4.1

Teorema 4.1: Condição necessária para a existência de extremos relativos.

Sejam $z = f(x,y)$ *uma função definida num conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *cujo interior* é não vazio, e* (x_0, y_0) *um ponto interior a* D. *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *existem e* $f(x,y)$ *tem um extremo relativo em* (x_0, y_0), *então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \ e \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Demonstração: Pela definição de derivada parcial,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Suponha que f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0). Pela definição 4.1, existe $r > 0$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0 \ ,$$

sempre que $0 < |\Delta x| < r$. Se $0 < \Delta x < r$, então

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leq 0$.

Por outro lado, se $-r < \Delta x < 0$,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0$.

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

---

*Dizemos que $X \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto interior** a um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ se existe $r > 0$ tal que a bola aberta $B_r(X)$ está contida em D. O subconjunto de D formado pelos pontos interiores a D é chamado **interior de** D.

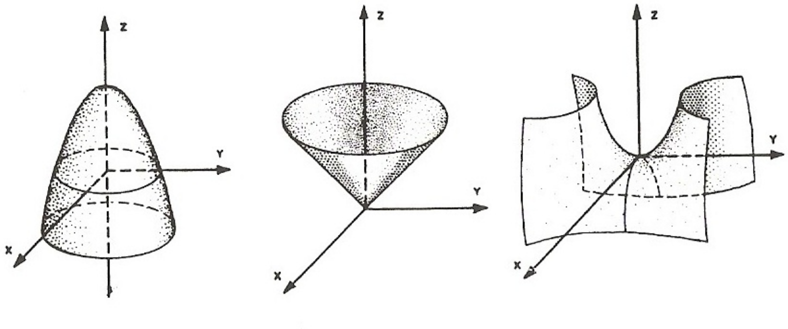
De modo análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Definição 4.2: Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x, y)$ é chamado **ponto crítico de f** se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe ou $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exemplo 4.1: Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e $f(0, 0) = 1$. Observando que $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \leq 1 = f(0, 0)$, para todos os valores de x e y, concluímos que f atinge o valor máximo 1 em $(0, 0)$ (figura 4.2 i)).

Exemplo 4.2: Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; logo, $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$. Por outro lado, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existem. (Verifique!) Portanto, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f. Como $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ para todos os valores de x e y então f atinge o valor mínimo 0 em $(0, 0)$ (figura 4.2 ii)).

Exemplo 4.3: O único ponto crítico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ é $(0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. No entanto, f não possui extremo relativo em $(0, 0)$ (figura 4.2 iii)).



$z = 1 - x^2 - y^2$ (i)

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ii)

$z = y^2 - x^2$ (iii)

Figura 4.2

Observe na figura 4.2 iii) que algumas seções retas verticais do gráfico de f passando por (0,0,0) têm concavidade voltada para cima e outras têm concavidade voltada para baixo. Neste caso, dizemos que a função f tem um **ponto de sela** no ponto crítico (0,0).

Se (x_0, y_0) é um ponto crítico de $z = f(x, y)$, então as curvas de equações $g(x) = f(x, y_0)$ (interseção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$) e $h(y) = f(x_0, y)$ (interseção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$) têm um ponto crítico em $x = x_0$ e $y = y_0$, respectivamente. A natureza do ponto crítico (x_0, y_0) não pode ser determinada, em geral, apenas pelo estudo das funções $g(x)$ e $h(y)$. Pode ocorrer que as funções $g(x) = f(x, y_0)$ e $h(y) = f(x_0, y)$ admitam um extremo relativo em $x = x_0$ e $y = y_0$, respectivamente, sem que $z = f(x, y)$ tenha um extremo relativo em (x_0, y_0), como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 4.4: Seja $f(x, y) = 1 - x^2 + 4xy - y^2$. O vetor $\nabla f(x, y) = (-2x + 4y, 4x - 2y)$ se anula apenas em $(0, 0)$.

As funções $g(x) = f(x, 0) = 1 - x^2$ e $h(y) = f(0, y) = 1 - y^2$ têm um máximo relativo em $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente. No entanto, a função $u(x) = f(x, x) = 1 + 2x^2$ (que define a curva de interseção do gráfico de $f(x, y)$ com plano $y = x$) tem um mínimo relativo em $x = 0$. Portanto, $(0, 0)$ é um ponto de sela de f.

Para analisar a natureza de um ponto crítico (x_0, y_0) de $z = f(x, y)$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, usaremos o teste da derivada segunda, que será dado no próximo teorema.

Teorema 4.2: Teste da derivada segunda.

Seja $z = f(x, y)$ *uma função de classe* C^2 *numa bola aberta* $B = \mathcal{B}_r(x_0, y_0)$.

Suponhamos que (x_0, y_0) *é um ponto crítico de* $f(x, y)$ *tal que* $\nabla f(x_0, y_0) =$ $(0,0)$. *Denotemos por*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \ , \ \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \ \ e \ \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Se

(i) $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, *então* f *tem um valor máximo relativo em* (x_0, y_0) ;

(ii) $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$,*então* f *tem um valor mínimo relativo em* (x_0, y_0) ;

(iii) $B^2 - AC > 0$, *então* f *tem um ponto de sela em* (x_0, y_0).

Demonstração: Seja $u = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ um vetor unitário na direção de um vetor que faz um ângulo α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, com o eixo positivo dos x. A derivada direcional de $f(x, y)$ na direção de u é

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha.$$

Observe que $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = 0$, para qualquer α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

A derivada direcional de segunda ordem de f na direção de u é definida por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha\right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha. \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.8, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, para todo $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$.

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\operatorname{sen}^2\alpha,$$

para todo $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$.

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_0, y_0) = A\cos^2\alpha + 2B \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Assim, o estudo da natureza dos pontos críticos de f se reduz à análise do sinal da função

$$P(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha\,,\ 0 \le \alpha \le 2\pi.$$

Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, podemos escrever

$$P(\alpha) = \cos^2\alpha(A + 2B\operatorname{tg}\alpha + C\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Segue que $P(\alpha)$ é positivo, negativo ou nulo, dependendo de o polinômio $Q(v) = A + 2Bv + Cv^2$ ser positivo, negativo ou nulo, onde $v = \operatorname{tg}\alpha$.

Para demonstrar (i), suponhamos que $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, o que acarreta $C < 0$; logo, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = C < 0$. O polinômio $Q(v)$ não possui raízes reais, visto que $B^2 - AC < 0$; assim, $Q(v)$ tem sempre o sinal de C que é negativo. Portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_0, y_0)$ é negativa em todas as direções α, $0 \le \alpha \le 2\pi$.

A demonstração de (ii) é análoga à de (i).

Suponhamos agora que $B^2 - AC > 0$, e demonstremos (iii).

O polinômio $Q(v) = A + 2Bv + Cv^2$ possui raízes reais e distintas. Portanto, $Q(v)$ é positivo para alguns valores de v e negativo para outros. Logo, $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_0, y_0)$ é positiva em algumas direções e negativa em outras.

Observação 4.1: No caso em que $B^2 - AC = 0$, o ponto crítico pode ser um ponto de mínimo relativo de f, um ponto de máximo relativo de f, ou não satisfazer nenhuma destas propriedades, como mostra o exercício 2 da seção 4.2.

Exemplo 4.5: Localize e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y.$$

Solução: Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 6x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

Para encontrar os pontos críticos, resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x &= 0, \\ 3y^2 - 3 &= 0. \end{cases}$$

Da primeira equação segue que $x = 0$ ou $x = 1$, e da segunda equação obtemos $y = \pm 1$. Portanto, os pontos críticos são: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Para aplicar o teste da derivada segunda, encontramos as derivadas parciais de segunda ordem da função f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x - 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

Em $(0, 1)$ temos $B^2 - AC = 36 > 0$.

Em $(0, -1)$ temos $B^2 - AC = -36 < 0$ e $A = -6 < 0$.

Em $(1, 1)$ temos $B^2 - AC = -36 < 0$ e $A = 6 > 0$.

Em $(1, -1)$ temos $B^2 - AC = 36 > 0$.

Assim, concluímos que a função f assume um valor máximo relativo em $(0, -1)$, um valor mínimo relativo em $(1, 1)$, e que $(0, 1)$ e $(1, -1)$ são pontos de sela.

Exemplo 4.6: O gráfico da função $g(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ é uma superfície S no $\mathbb{R}^3$. Encontre os pontos de S mais próximos da origem.

Solução: A distância de (x,y,z) a $(0,0,0)$ é dada pela fórmula

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Se $(x,y,z) \in S$, então d pode ser expressa pela função de duas variáveis

$$D(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}}.$$

Observe que $D(x,y)$ será minimizada quando $f(x,y) = D^2(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2y^2}$ for minimizada.

Para encontrar os pontos críticos da função f resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2x - \dfrac{2}{x^3y^2} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2y - \dfrac{2}{x^2y^3} & = 0. \end{cases}$$

Da primeira equação temos $y^2 = \dfrac{1}{x^4}$ e, substituindo na segunda equação, obtemos $\dfrac{1}{x^6} = 1$. Então $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Portanto, os pontos críticos de f são:$(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{6}{x^4y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4}{x^3y^3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{6}{x^2y^4},$$

obtemos $B^2 - AC = -48 < 0$ e $A = 8 > 0$ em todos os pontos críticos; logo, todos são pontos de mínimo relativo e f assume o valor 3 nesses pontos. Assim, os pontos de S mais próximos da origem são: $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ e $(-1,-1,1)$.

Definição 4.3: Sejam $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um **valor máximo absoluto** de f (resp. **valor mínimo absoluto** de f) se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp.}\, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)),$$

para todo $(x, y) \in D$.

A função considerada na figura 4.1 ii) tem um máximo absoluto em (x_0, y_0), enquanto que (x_0, y_0) é apenas um ponto de mínimo relativo da função considerada na figura 4.1 i).

Teorema 4.3: *Se $z = f(x, y)$ é uma função contínua num conjunto limitado* e fechado** $D \subset \mathbb{R}^2$, então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D.*

A demonstração é semelhante àquela para funções de uma variável, a qual pode ser encontrada em [4], vol.I, pp. 63-64.

Note que este teorema nos garante a existência de pontos de máximo e mínimo absolutos, mas não nos fornece um critério segundo o qual possamos localizá-los. Passemos, agora, a tratar desta questão.

Se (x_0, y_0) é um extremo absoluto de uma função f em D (D como no enunciado do teorema 4.3), então (x_0, y_0) é um ponto interior a D ou pertence à fronteira de D. Portanto, para localizarmos os extremos absolutos de f em

---

*Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito **limitado**, se existe um número real $r > 0$ e um ponto $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $D \subset B_r(X)$.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é um ponto da **fronteira de D**, denotada por ∂D, se para qualquer bola aberta B centrada em X tem-se $B \cap D \neq \emptyset$ e $B \cap (\mathbb{R}^n - D) \neq \emptyset$.

D é dito **fechado se D é a união (necessariamente disjunta) do conjunto dos pontos interiores a D com os pontos da fronteira de D.

D,encontramos os pontos críticos de f e comparamos os valores de f nestes pontos com os valores máximo e mínimo de f na fronteira de D.

Exemplo 4.7: Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = (x-2)^2y + y^2 - y$ definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\,,\ y \leq 0 \,\mathrm{e}\, x + y \leq 4\}$ (figura 4.3) .

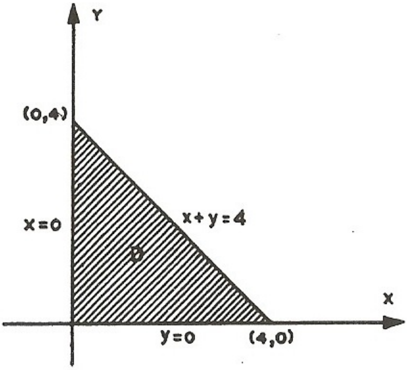


Figura 4.3

Solução: Como a função f é contínua no conjunto limitado e fechado D, o teorema 4.3 nos garante a existência de máximo e mínimo em D.

Para localizarmos os pontos críticos, resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2y(x-2) & = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = (x-2)^2 + 2y - 1 & = 0. \end{cases}$$

O único ponto crítico no interior de D é $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, e $f\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Vamos agora analisar o comportamento da função f na fronteira de D.

No segmento $y = 0\,,\ 0 \leq x \leq 4$, a função é nula.

No segmento $x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 4$, a função f pode ser representada por $h(y) = f(0,y) = 3y + y^2,\ 0 \leq y \leq 4$. Como esta função h é estritamente crescente, ela tem um mínimo em $y = 0$ e um máximo em $y = 4$, sendo $h(0) = f(0,0) = 0$ e $h(4) = f(0,4) = 28$.

No segmento $x + y = 4$, $0 \leq y \leq 4$, representamos a função f por $g(y) = f(4-y, y) = y^3 - 3y^2 + 3y$, $0 \leq y \leq 4$. Note que $g'(y) = 3(y-1)^2$ é sempre positiva, exceto em $y = 1$, onde ela se anula. Portanto, a função g tem um mínimo em $y = 0$ e um máximo em $y = 4$, com $g(0) = f(4,0) = 0$ e $g(4) = f(0,4) = 28$.

Comparando os valores obtidos, verificamos que a função f assume o valor mínimo $-\dfrac{1}{4}$ em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e o valor máximo 28 em $(0,4)$.

Exemplo 4.8: Uma placa metálica circular com um metro de raio está colocada com centro na origem do plano xy e é aquecida de modo que a temperatura num ponto (x,y) é dada por

$$T(x,y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5) \text{ graus},$$

onde x e y estão em metros. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

Solução: Queremos encontrar o máximo e o mínimo da função contínua $T(x,y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)$ definida no conjunto limitado e fechado $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Desde que $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y) = 64(6x - 2y)$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 64(-2x + 6y + 2)$, os pontos críticos da função T no interior da placa circular D são encontrados resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 6x - 2y &= 0, \\ -2x + 6y + 2 &= 0. \end{cases}$$

Portanto, o único ponto crítico no interior da placa é $\left(-\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$, e

$T\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right) = 296.$

Precisamos, agora, analisar os valores de $T(x, y)$ ao longo da fronteira da placa circular, cuja equação é $x^2 + y^2 = 1$.

Se fizermos

$$\begin{cases} x &= \cos\theta, \\ y &= \operatorname{sen}\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \end{cases}$$

o ponto (x, y) percorre a fronteira da placa quando θ varia no intervalo $[0, 2\pi]$.

A temperatura na fronteira da placa no ponto correspondente a $\theta \in [0, 2\pi]$ é dada por

$$\begin{aligned} T(\theta) &= T(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \\ &= 64(3\cos^2\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 5) = \\ &= 128(4 - \cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

Desse modo, os candidatos a máximo e mínimo da função T na fronteira da placa são os pontos correspondentes a $\theta = 0$ e $\frac{dT}{d\theta}(\theta) = 0$. Como

$$\frac{dT}{d\theta}(\theta) = 128(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta) = 128(1 - 2\cos^2\theta + \cos\theta),$$

as soluções de $\frac{dT}{d\theta}(\theta) = 0$ são as soluções de $\cos\theta = 1$ e de $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Assim, $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Quando $\theta = 0$, temos $T(0) = T(1, 0) = 128 \times 4 = 512$.

Quando $\theta = \frac{2\pi}{3}$, temos $T\left(\frac{2\pi}{3}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 32(16 + 3\sqrt{3})$.

Quando $\theta = \frac{4\pi}{3}$, temos $T\left(\frac{4\pi}{3}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 32(16 - 3\sqrt{3})$.

Logo, a menor temperatura na placa é 296 graus e a maior temperatura é $32(16 + 3\sqrt{3})$ graus (aproximadamente 678,28 graus).

§4.2 Exercícios

1. Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$.

   b) $f(x,y) = x \operatorname{sen} \; y$.

   c) $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$.

   d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

   e) $f(x,y) = 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$

2. Estude a natureza do ponto crítico das funções abaixo, mostrando que tal ponto tem a propriedade indicada.

   a) $f(x,y) = (x-y)^4 + (x+y+2)^2$, mínimo.

   b) $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4$. , máximo.

   c) $f(x,y) = x^3 + (x-y)^2$, nem máximo, nem mínimo.

3. Encontre o máximo e mínimo absoluto de cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = \operatorname{sen}\; x + \operatorname{sen}\; y + \operatorname{sen}\; (x+y) \quad , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

   b) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, na região triangular de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

   c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y} \quad , \quad |x| \le 1 \quad , \quad |y| \le 1$.

4. Em um laboratório foram obtidas, experimentalmente, as seguintes medidas:

$$t_1 = 0 \quad , \quad v_1 = 2;$$

$$t_2 = 1 \quad , \quad v_2 = 8;$$

$$t_3 = 2 \quad , \quad v_3 = 11.$$

Determine os coeficientes $\underline{a}$ e $\underline{b}$ da função $v(t) = at+b$ de modo a minimizar a soma dos erros quadráticos, isto é,

$${e_1}^2 + {e_2}^2 + {e_3}^2, \text{ onde } e_i = v(t_i) - v_i \quad (i = 1,2,3).$$

5. De uma longa folha de alumínio com 12 cm de largura, deseja-se construir uma calha, dobrando-se os lados da folha para cima e formando duas abas de mesmo tamanho, de modo que estas abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura das abas e que ângulo elas devem fazer com a horizontal, a fim de que a capacidade da calha seja máxima?

6. Num círculo de raio R, traçam-se duas cordas paralelas, uma acima e outra abaixo do centro, e constrói-se um trapézio isósceles. Determinar as distâncias das duas cordas ao centro, para que a área do trapézio seja máxima.

§4.3 Máximos e mínimos com restrições

Multiplicadores de Lagrange

O problema de se encontrarem os pontos extremos de uma função $f(x, y)$ na fronteira de uma região D do plano xy consiste em procurar os extremos da função $f(x, y)$, para (x, y) sobre uma curva no plano xy de equação $g(x, y) = 0$. A condição $g(x, y) = 0$ é chamada **restrição**, e o problema correspondente é um **problema de extremos condicionados**.

Para resolver tal problema podemos, quando possível, reduzi-lo, usando a restrição, ao cálculo dos máximos e mínimos de uma função de uma variável (como nos exemplos 4.7 e 4.8). Nem sempre tal procedimento é praticável e, freqüentemente, o método a seguir é mais conveniente.

Teorema 4.4: *Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funções definidas e de classe C^1 num subconjunto aberto U do plano xy que contém a curva C de equação $g(x, y) = 0$. Se $f(x, y)$ tem um valor máximo ou mínimo em $(x_0, y_0) \in C$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ não é o vetor nulo, então existe um número real λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0 \tag{4.1}$$

O número λ é chamado **multiplicador de Lagrange**.

Demonstração: Se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, basta tomar $\lambda = 0$.

Suponhamos então $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Visto que $\nabla g(x_0, y_0)$ é não nulo, o Teorema da função implícita (Apêndice, seção A.1) nos garante que a equação $g(x, y) = 0$ define y como uma função diferenciável de x ou x como uma função diferenciável de y numa vizinhança de (x_0, y_0). Portanto, uma parte de C contendo (x_0, y_0) pode ser parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $a < t < b$, onde $\sigma(t_0) = (x_0, y_0)$ e o vetor $\sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ é não nulo e tangente a C em (x_0, y_0).

Como $(x_0, y_0) \in C$ é um extremo de $f(x, y)$, então a função $F(t) = f(\sigma(t))$, $a < t < b$, possui um extremo em $t_0 \in (a, b)$; logo, $F'(t_0) = 0$.

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t_0) = \frac{d}{dt}(f(\sigma(t_0))) = \\ &= \nabla f(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \sigma'(t_0). \end{aligned}$$

Assim, como o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é não nulo, ele é perpendicular ao vetor tangente $\sigma'(t_0)$ e, portanto, à curva C em (x_0, y_0).

Como $\nabla g(x_0, y_0)$ é também perpendicular à curva de nível C de equação $g(x, y) = 0$, os dois gradientes são paralelos e obtemos a equação (4.1).

Observação 4.2:

1. Na demonstração do teorema 4.4 foi essencial que o ponto (x_0, y_0) não fosse uma extremidade da curva C e que $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Pode ocorrer que um ponto na extremidade de C ou um ponto de C onde o gradiente de g se anule seja um ponto de máximo ou mínimo da função f sem que este satisfaça (4.1) (ver os exemplos 4.10 e 4.11).

2. Geometricamente, segue do teorema 4.4 que se $(x_0, y_0) \in C$ é um ponto extremo de $f(x,y)$, então a curva de nível de equação $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ é tangente à curva C em (x_0, y_0).

Exemplo 4.9: Encontre a menor distância da origem à hipérbole de equação

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0.$$

Solução: A distância de um ponto (x,y) à origem é dada por

$$D(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Portanto, devemos minimizar a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ com a restrição $g(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

Note que f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla g(x,y) = (2x + 8y, 8x + 14y)$ se anula apenas em $(0,0)$, que não satisfaz $g(x,y) = 0$.

Pelo teorema 4.4, devemos resolver a equação vetorial

$$(2x, 2y) + \lambda(2x + 8y, 8x + 14y) = (0,0),$$

onde (x,y) satisfaz a equação

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0.$$

Estas, por sua vez, dão origem ao sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x + 8y) &= 0, \\ 2y + \lambda(8x + 14y) &= 0, \\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 &= 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

As duas primeiras equações de (4.2) formam um sistema linear homogêneo nas variáveis x e y, a saber

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + \quad 4\lambda y = 0, \\ 4\lambda x + (1+7\lambda)x = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Se este sistema possuísse apenas a solução trivial $x = 0$ e $y = 0$, esta não satisfaria a terceira equação de (4.2). Logo, o determinante dos coeficientes de (4.3) deve ser nulo, isto é,

$$0 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1+7\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(1+7\lambda) - 16\lambda^2 = 1 + 8\lambda - 9\lambda^2,$$

o que fornece $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\dfrac{1}{9}$.

Substituindo $\lambda = 1$ em (4.2), concluímos que o sistema resultante não tem solução real. Para $\lambda = -\dfrac{1}{9}$, o sistema (4.2) se transforma em

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

As soluções de (4.4) são os pontos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$. Como $f(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = f(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 25$, temos que a menor distância é 5.

Exemplo 4.10: Determine o maior e o menor valor de $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$ se (x,y) pertence ao segmento de reta de equação $y + x - 1 = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Solução: Como $f(x,y)$ é contínua e o segmento de reta em questão é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, o teorema 4.3 nos garante a existência de máximo e mínimo.

Considere $g(x,y) = y + x - 1 \doteq 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Note que f e g são de classe C^1, o vetor $\nabla g(x,y) = (1,1)$ nunca se anula e $\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2+y^2+y}\,,\,(2y+1)e^{x^2+y^2+y})$.

Pelo teorema 4.4, para (x,y) pertencente ao segmento de reta de equação $y+x-1=0\ ,\ 0<x<1$, devemos resolver o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{lcccl} 2xe^{x^2+y^2+y} & + & \lambda & & =0,\\ (2y+1)e^{x^2+y^2+y} & + & \lambda & & =0,\\ y & + & x & -\ 1 & =0. \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Subtraindo a primeira equação de (4.5) da segunda equação de (4.5) obtemos $x = \dfrac{2y+1}{2}$, que substituído na terceira equação de (4.5) nos dá $y = \dfrac{1}{4}$; logo, $x = \dfrac{3}{4}$. Comparando os valores de $f(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = e^{\frac{7}{8}}$, $f(0,1) = e^2$ e $f(1,0) = e$, verificamos que o valor máximo de f ocorre em $(0,1)$, e é igual a e^2, e que o valor mínimo de f ocorre em $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$, e vale $e^{\frac{7}{8}}$.

Exemplo 4.11: Encontre o ponto da curva C de equação $(1-x)^3+y^2=0$ (figura 4.4) mais próximo da origem.

Solução: Devemos minimizar a função $f(x,y)=x^2+y^2$, sujeita à restrição $g(x,y) = (1-x)^3+y^2 = 0$. Note que f e g são de classe C^1, e o vetor $\nabla g(x,y) = (-3(1-x)^2, 2y)$ se anula no ponto $(1,0)$ que pertence a C (pois $g(1,0) = 0$). Pelo teorema 4.4, para $(x,y)\in C$, $(x,y)\neq(1,0)$, temos que resolver o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{lccl} 2x & - & 3\lambda(1-x)^2 & =0,\\ 2y & + & 2\lambda y & =0,\\ (1-x)^3 & + & y^2 & =0. \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Da segunda equação de (4.6) obtemos $y=0$ ou $\lambda=-1$.

Se $y = 0$, a terceira equação de (4.6) nos dá $x = 1$, que não verifica a primeira equação de (4.6) e, portanto, não é solução do sistema.

Se $\lambda = -1$, a primeira equação de (4.6) não possui solução para x real e, portanto, o sistema não tem solução.

Neste caso, a solução do problema é o ponto $(1, 0)$ (pois $f(1, 0) = 1$ e, se $(x, y) \in C$, então $x \geq 1$; assim $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 1$).

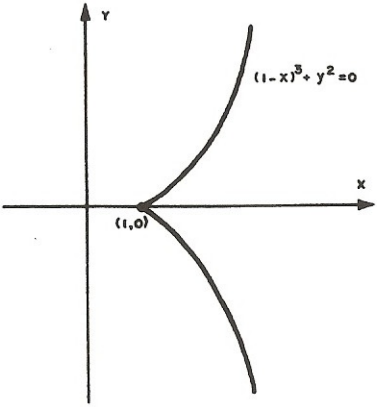


Figura 4.4

Teorema 4.5: *Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ funções de classe C^1 definidas num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$. Considere a superfície S de equação $g(x, y, z) = 0$ contida em U. Se $f(x, y, z)$ tem um valor máximo ou mínimo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a S e $\nabla g(P_0)$ não é o vetor nulo, então existe um número real λ tal que*

$$\nabla f(P_0) + \lambda \nabla g(P_0) = 0. \tag{4.7}$$

Demonstração: Como $\nabla g(P_0) \neq 0$, podemos supor que $\dfrac{\partial g}{\partial z}(P_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita (Apêndice, seção A.2), S é o gráfico de uma função de classe C^1 $z = h(x, y)$ numa vizinhança de P_0, sendo $z_0 = h(x_0, y_0)$.

Dado um vetor arbitrário e não nulo T tangente a S em P_0, o lema 3.1 garante a existência de uma curva parametrizada por $\sigma(t)$ $(a < t < b)$ contida em S tal que $\sigma(t_0) = P_0$ e $\sigma'(t_0) = T$.

Como $f(x, y, z)$ tem um valor extremo em P_0, a função $F(t) = f(\sigma(t))$ tem um valor extremo em $t = t_0$. Portanto,

$$0 = \frac{dF}{dt}(t_0) = \nabla f(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot T.$$

Assim, se $\nabla f(P_0) \neq 0$, ele é perpendicular a T. Como T é um vetor tangente a S em P_0, temos que $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a S neste ponto. Daí se conclui que os vetores $\nabla g(P_0)$ e $\nabla f(P_0)$ são paralelos, o que nos dá a equação (4.7). Se $\nabla f(P_0) = 0$, temos a equação (4.7) para $\lambda = 0$.

Exemplo 4.12: Encontre as dimensões da caixa retangular de maior volume que pode ser inscrita no elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$, cujas arestas sejam paralelas aos eixos coordenados.

Solução: Se (x, y, z) é o vértice da caixa no primeiro octante, as dimensões da caixa são $2x$, $2y$ e $2z$, e seu volume é dado por

$$V(x, y, z) = 8xyz.$$

Assim, o problema consiste em maximizar a função $V(x, y, z)$, sujeita à restrição $g(x, y, z) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$. Note que o vetor $\nabla g(x, y, z) = (\dfrac{2x}{9}, \dfrac{y}{2}, 2z)$ não se anula no elipsóide $g(x, y, z) = 0$. Pelo teorema 4.5, temos que resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} 8yz + \dfrac{2\lambda}{9}x = 0, \\ 8xz + \dfrac{\lambda}{2}y = 0, \\ 8xy + 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Multiplicando-se as três primeiras equações por $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ e $\frac{z}{2}$, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} 4xyz + \dfrac{\lambda}{9}x^2 = 0, \\ 4xyz + \dfrac{\lambda}{4}y^2 = 0, \\ 4xyz + \lambda z^2 = 0. \end{cases}$$

Adicionando-se estas três equações, e usando a última equação de (4.8), temos

$$12xyz + \lambda = 0, \text{ isto é, } \lambda = -12xyz.$$

Substituindo este valor de λ nas três primeiras equações de (4.8) e simplificando, obtemos

$$\begin{cases} yz(3 - x^2) = 0, \\ xz(4 - 3y^2) = 0, \\ xy(1 - 3z^2) = 0. \end{cases}$$

Como x, y e z são positivos, das equações acima resulta que $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, as dimensões da caixa são $2\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Teorema 4.6: *Sejam $f(x,y,z)$, $g_1(x,y,z)$ e $g_2(x,y,z)$ funções de classe C^1 definidas num subconjunto aberto $U \subset I\!R^3$. Considere a curva C de interseção das superfícies de equações $g_1(x,y,z) = 0$ e $g_2(x,y,z) = 0$, ambas contidas em U. Se $f(x,y,z)$ tem um valor extremo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a C e o produto vetorial $\nabla g_1(P_0) \times \nabla g_2(P_0)$ é não nulo, então existem números reais λ_1 e λ_2* tais que

$$\nabla f(P_0) + \lambda_1 \nabla g_1(P_0) + \lambda_2 \nabla g_2(P_0) = 0. \tag{4.9}$$

Demonstração: Por definição, o produto vetorial

$$\begin{aligned} \nabla g_1 \times \nabla g_2 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)} \right) , \end{aligned}$$

onde $\dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)}$ é o determinante

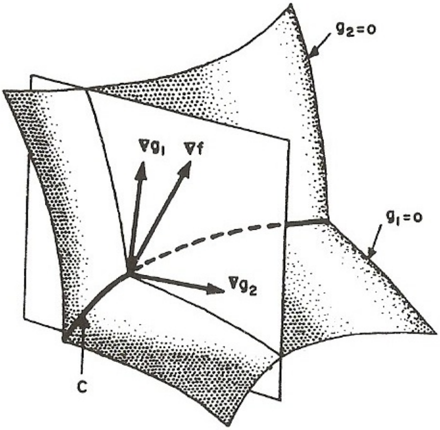
$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} .$$

Como $(\nabla g_1 \times \nabla g_2)(P_0)$ é não nulo, então:

(i) Os vetores $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$ são não nulos e, portanto, normais à curva C em P_0, visto que $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$ são vetores normais às superfícies de equações $g_1(x,y,z) = 0$ e $g_2(x,y,z) = 0$, respectivamente (figura 4.5).

(ii)Os vetores $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$ são linearmente independentes e, portanto, geram o plano normal à curva C em P_0.

(iii) Um dos três determinantes, que são as componentes do vetor $(\nabla g_1 \times \nabla g_2)(P_0)$, é não nulo, por exemplo, $\dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}(P_0)$. Portanto, pelo Teorema da função implícita (Apêndice, seção A.3), uma parte de C contendo P_0 pode ser parametrizada por uma função diferenciável $\sigma(t) = (x(t), y(t), t)$, a $t < b$, tal que $\sigma(t_0) = P_0$, e um vetor tangente a C em P_0 é $T = \sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), 1)$.



Os vetores ∇g_1, ∇g_2, ∇f estão no plano normal a C em P_0.

Figura 4.5

Se $P_0 \in C$ é um extremo de $f(x, y, z)$, então a função $F(t) = f(\sigma(t))$, $a < t < b$, tem um valor extremo em $t = t_0$. Logo, pela regra da cadeia,

$$0 = \frac{dF}{dt}(t_0) = \nabla f(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot T.$$

Assim, se $\nabla f(P_0) \neq 0$, ele é perpendicular à reta tangente à curva C em P_0. Portanto, $\nabla f(P_0)$ é normal à curva C em P_0. Logo, $\nabla f(P_0)$ é combinação linear dos vetores $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$, o que prova (4.9). Se $\nabla f(P_0) = 0$, temos a equação (4.9) para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Exemplo 4.13: Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeita às restrições $x^2 + y^2 = 2$ e $x + z = 1$.

Solução: Queremos determinar os pontos extremos da função de classe C^1 $f(x, y, z) = = x + y + z$, para (x, y, z) pertencente à curva C de interseção do cilindro $g_1(x, y, z) \ = x^2 + y^2 - 2 = 0$ com o plano $g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$.

Note que o vetor $\nabla g_1 \times \nabla g_2 = (2y, -2x, -2y)$ não se anula nos pontos de C. Pelo teorema 4.6, devemos resolver o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} 1 & + & 2\lambda_1 x & + & \lambda_2 & = 0, \\ 1 & + & 2\lambda_1 y & & & = 0, \\ 1 & + & & & \lambda_2 & = 0, \\ x^2 & + & y^2 & & & = 2, \\ x & + & z & & & = 1. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Da terceira equação de (4.10), obtemos $\lambda_2 = -1$; assim, a primeira equação de (4.10) torna-se $2\lambda_1 x = 0$, o que implica $\lambda_1 = 0$ ou $x = 0$. Da segunda equação de (4.10), temos que $\lambda_1 \neq 0$; logo, substituindo $x = 0$ nas duas últimas equações de (4.10), obtemos $y = \pm\sqrt{2}$ e $z = 1$. Portanto, os pontos que satisfazem o sistema (4.10) são $(0, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, -\sqrt{2}, 1)$. Comparando o valor de f nestes pontos concluímos que $(0, -\sqrt{2}, 1)$ é ponto de mínimo e $(0, \sqrt{2}, 1)$ é ponto de máximo.

§4.4 Exercícios

1. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y) = x + y^2$ na região

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \ , \ (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Um disco plano tem a forma da região do plano xy definida por $x^2 + y^2 \leq 1$. Aquece-se o disco (inclusive a fronteira, onde $x^2 + y^2 = 1$) de modo que a temperatura em cada ponto é dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine os pontos de maior e menor aquecimento.

3. Calcule a menor distância do ponto $(0,2)$ à curva de equação $y = x^2 - 4$.

4. Mostre que a distância do ponto (x_0, y_0) à reta de equação $ax + by + c = 0$ é dada por $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5. Encontre a menor distância da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$ à reta de equação $y - x + 10 = 0$.

6. Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas, uma pessoa está na origem, no interior de uma praça cujo contorno tem por equação $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$. A que ponto a pessoa deve se dirigir, ao sair da praça, para caminhar o menos possível?

7. Em que pontos da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a tangente a esta forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?

8. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída de modo que sua área seja 36 m^2.

9. A janela de uma casa tem a forma de um retângulo com um triângulo isósceles no topo. Se o perímetro da janela é 12 m e esta deve coletar a maior

quantidade de energia solar possível, mostre que o ângulo da base do triângulo é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

10. Determine a equação do plano que passa por $(1,2,1)$ e determina com os planos coordenados um tetraedro de volume máximo.

11. Encontre o mínimo de $f(x,y,z) = x+y+z$ na superfície de equação $xyz = k$, onde $x>0$, $y>0$ e $z>0$. Use o resultado para mostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x+y+z) \ , \quad x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0.$$

12. a) A função $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ tem um máximo na porção da superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2 = 5a^2$, onde $x>0$, $y>0$, $z>0$ e a é uma constante positiva. Encontre-o.

b) Usando o resultado do item a), mostre que

$$x^2y^2z^6 \leq 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5 \ , \quad x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0.$$

13. Encontre o valor máximo de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, sujeita às restrições $2x-y+z=0$ e $x^2+y^2+3z^2=30$.

14. Determine os pontos da curva obtida pela interseção das superfícies de equações $x^2-xy+y^2-z^2=1$ e $x^2+y^2=1$ mais próximos da origem.

15. Considere a curva C interseção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ com o plano $2x+y+z=12$. Determine as distâncias máxima e mínima dos pontos de C ao plano xy.

CAPÍTULO 5

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Este capítulo é dedicado ao estudo das integrais dupla e tripla que são extensões naturais da integral de Riemann de funções reais de uma variável real.

§5.1 Interpretação geométrica da integral dupla

Consideremos uma função real $z = f(x, y)$ definida e contínua no retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Se $f(x, y) \geq 0$ em R, o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície situada acima do retângulo R. Esta superfície, o retângulo R e os quatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ formam a fronteira de uma região W do espaço (figura 5.1).

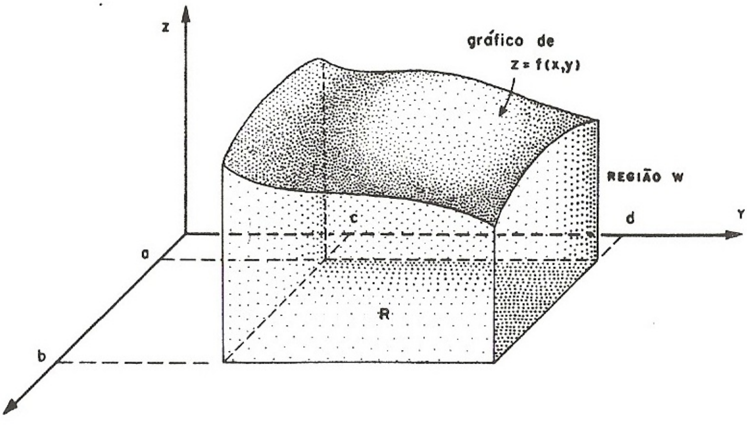


Figura 5.1

Assumindo que a região W assim definida possui um volume (conforme a observação 5.1 da seção 5.2), chamamos este volume de **integral dupla de f sobre R** e o denotamos por

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy \text{ ou } \iint\limits_R f(x,y)dA \ .$$

Exemplo 5.1: Se $f(x,y) = k$, onde k é uma constante real positiva, então

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = k(b-a)(d-c),$$

visto que esta integral é o volume de uma caixa retangular de base $R = [a,b] \times [c,d]$ e altura k.

Exemplo 5.2: Se $f(x,y) = 1 - x$ e $R = [0,1] \times [0,1]$, então

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \frac{1}{2},$$

pois esta integral é o volume do prisma triangular mostrado na figura 5.2.

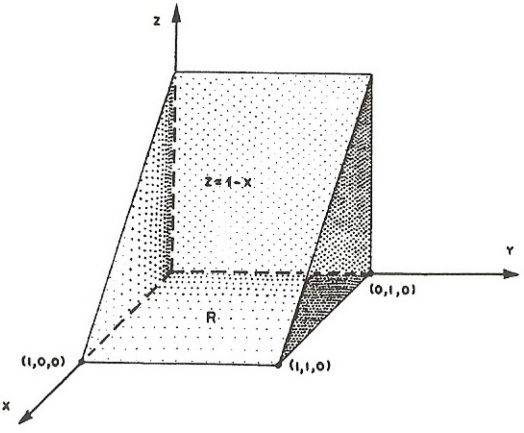


Figura 5.2

§5.2 Integral dupla sobre um retângulo

Daremos agora uma definição rigorosa da integral dupla através do método das somas de Riemann, de modo semelhante ao usado para funções de uma variável.

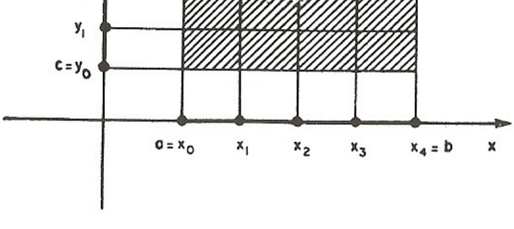
Fixaremos, inicialmente, algumas notações para partições e somas.

Consideremos P_1 e P_2 duas partições regulares de ordem n de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente, isto é,

$$P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \quad \text{e} \quad P_2 = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\},$$

onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, com $x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{n}$,
e $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, com $y_{k+1} - y_k = \dfrac{d-c}{n}$.

O produto cartesiano $P_1 \times P_2$ é dito uma **partição regular de ordem** n do retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Esta partição decompõe o retângulo R em n^2 subretângulos (figura 5.3).



$(n = 4)$

Figura 5.3

Suponhamos que $z = f(x, y)$ é uma função real limitada* em R, R_{jk} é o sub-retângulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ e c_{jk} é um ponto qualquer de R_{jk}. Formemos a soma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y \right) = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A,$$

onde $\Delta x = x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{n}$, $\Delta y = y_{k+1} - y_k = \dfrac{d-c}{n}$ e $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Uma soma deste tipo é chamada **soma de Riemann de f** sobre R.

Definição 5.1: Se a seqüência (S_n) das somas de Riemann da função f tem limite $s \in \mathbb{R}$ quando n tende para $+\infty$ e este limite independe da escolha dos pontos c_{jk} nos subretângulos R_{jk}, isto é,

$$s = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A,$$

dizemos que f **é integrável sobre** R e escrevemos

$$\int\int_R f(x, y) dx dy = s.$$

Teorema 5.1: *Toda função contínua definida num retângulo R é integrável sobre R.*

A demonstração deste teorema requer alguns conceitos que não são vistos, em geral, num primeiro curso de Cálculo (veja [13], apêndice B).

Observação 5.1: Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua e positiva num retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Consideremos a região W do espaço, limitada pelo gráfico de $z = f(x, y)$, o retângulo R e os planos $x = a$, $x = b$, $y = c$

---

*Dizemos que $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é uma função **limitada** em $R \subset \mathbb{R}^n$ se existir uma constante real positiva M tal que $| f(x_1, x_2, \cdots, x_n) | \leq M$, qualquer que seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R$.

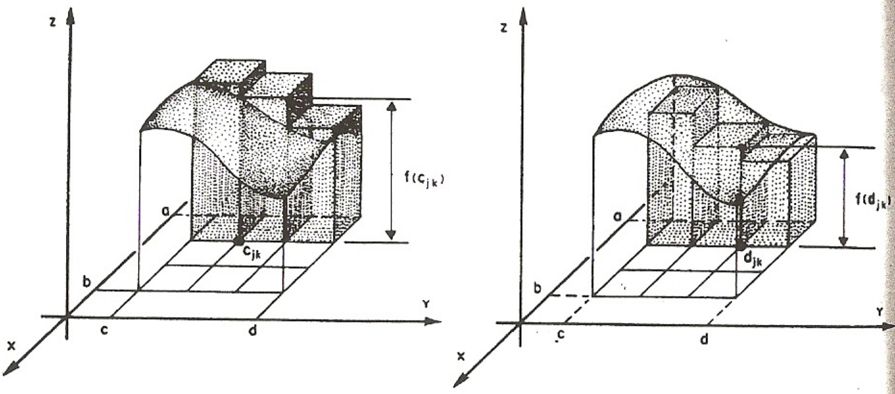
e $y = d$. Se tomarmos c_{jk} um ponto de máximo* de $f(x, y)$ no subretângulo R_{jk}, então $f(c_{jk})\Delta x \Delta y$ representa o volume da caixa retangular de base R_{jk} e altura $f(c_{jk})$. A soma

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x \Delta y$$

representa o volume do sólido circunscrito à região W (figura 5.4(i)). Analogamente, se d_{jk} é um ponto de mínimo* de $f(x, y)$ em R_{jk}, então a soma

$$s_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(d_{jk})\Delta x \Delta y$$

representa o volume do sólido inscrito à região W (figura 5.4 (ii)).



(i) (ii)

Figura 5.4

Pelo teorema 5.1,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = s,$$

---

*Tais c_{jk} e d_{jk} existem em virtude da continuidade de $f(x, y)$ em R (teorema 4.3).

mostrando que os volumes dos sólidos circunscrito e inscrito tendem para o mesmo valor s quando $n \to +\infty$. Portanto, a região W tem volume finito e seu valor é s.

Exemplo 5.3: Calcule $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dxdy$, onde $R = [0,1]\times[0,1]$. Esta integral representa o volume do sólido da figura 5.5.

Solução: Como $f(x,y) = x^2+y^2$ é contínua em R, segue do teorema 1.1 que f é integrável sobre R e

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x\Delta y,$$

sendo que este limite independe da escolha de c_{jk} em $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, onde

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_{j+1} = \frac{j+1}{n} < \cdots < x_n = 1,$$
$$0 = y_0 < y_1 = \frac{1}{n} < \cdots < y_{k+1} = \frac{k+1}{n} < \cdots < y_n = 1 \text{ e } \Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}.$$

Tomando $c_{jk} = (x_{j+1}, y_{k+1}) = \left(\dfrac{j+1}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j,k=0}^{n-1} f(x_{j+1}, y_{k+1}) \cdot \frac{1}{n^2} = \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} \left(x_{j+1}^2 + y_{k+1}^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(x_1^2 + y_{k+1}^2\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_2^2 + y_{k+1}^2\right) + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_n^2 + y_{k+1}^2\right)\right] = \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}^2\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 = \\
&= \frac{2}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^2 = \\
&= \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{3n^2}.
\end{aligned}$$

O limite da seqüencia (S_n) quando $n \to +\infty$ é $\frac{2}{3}$. Logo,

$$\int\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{2}{3}.$$

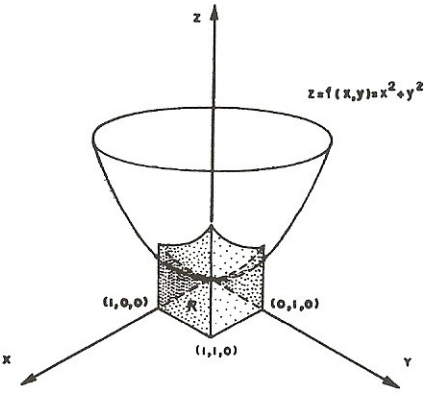


Figura 5.5

Veremos, através do próximo teorema, que funções não necessariamente contínuas num retângulo R podem ser integráveis.

Teorema 5.2: *Seja $z = f(x,y)$ uma função limitada no retângulo $R = [a,b]\times[c,d]$. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f pode ser descrito como uma união finita de gráficos de funções contínuas, então f é integrável sobre R.*

Sua demonstração pode ser vista em Apostol, 1969, p. 365.

Da definição de integral dupla como limite de somas de Riemann e dos teoremas sobre limites, podemos deduzir algumas propriedades fundamentais da integral dupla. Estas propriedades são, essencialmente, as mesmas da integral de uma função real de uma variável real.

(i) **Linearidade**. Sejam f e g funções integráveis num retângulo R e c_1, c_2 constantes reais. Então $c_1 f + c_2 g$ é integrável sobre R e

$$\int\int_R (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))dxdy = c_1 \int\int_R f(x,y)dxdy + c_2 \int\int_R g(x,y)dxdy.$$

(ii) **Monotonicidade**. Se f e g são integráveis num retângulo R e $f(x,y) \geq g(x,y)$, $(x,y) \in R$, então

$$\int\int_R f(x,y)dxdy \geq \int\int_R g(x,y)dxdy.$$

(iii) **Aditividade**. Se o retângulo R é subdividido em n retângulos $R_1, \cdots, R_n$, e se f é integrável sobre cada $R_i, i = 1, \cdots, n$, então f é integrável sobre R e

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{R_i} f(x,y)dxdy.$$

O teorema a seguir nos dá um método prático para o cálculo de algumas integrais duplas através de duas integrações sucessivas de funções de uma variável.

Teorema 5.3 (Teorema de Fubini): *Se a função $z = f(x,y)$ é contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, então a integral dupla de f sobre R pode ser obtida através de integrais iteradas, ou seja:*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy. \tag{5.1}$$

Nota: A fórmula (5.1) ainda é válida se f é descontínua apenas numa união finita de gráficos de funções contínuas.

Demonstração: Vamos mostrar que

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int\int_R f(x,y)dxdy.$$

Para cada $x \in [a,b]$, definamos

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Dividindo o intervalo $[c,d]$ por meio de uma partição regular de ordem n, $P = \{y_0, \cdots, y_k, \cdots, y_n\}$, podemos escrever

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy.$$

Para cada x fixo, aplicando o teorema do valor médio para integrais no intervalo $[y_k, y_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$, obtemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k),$$

onde $Y_k(x) \in [y_k, y_{k+1}]$.

Mostramos então que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k).$$

Pela definição de integral de funções de uma variável como limite de somas de Riemann,

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),$$

onde $P = \{x_0, \cdots, x_j, \cdots, x_n\}$ é uma partição regular de ordem n de $[a,b]$ e p_j é um ponto qualquer de $[x_j, x_{j+1}]$.

Tomando $c_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, obtemos

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx &= \int_a^b F(x)\,dx = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k)\right](x_{j+1} - x_j) = \\
&= \int\int_R f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int\int_R f(x,y)dxdy.$$

O teorema de Fubini tem uma interpretação geométrica simples, ilustrada na figura 5.6.

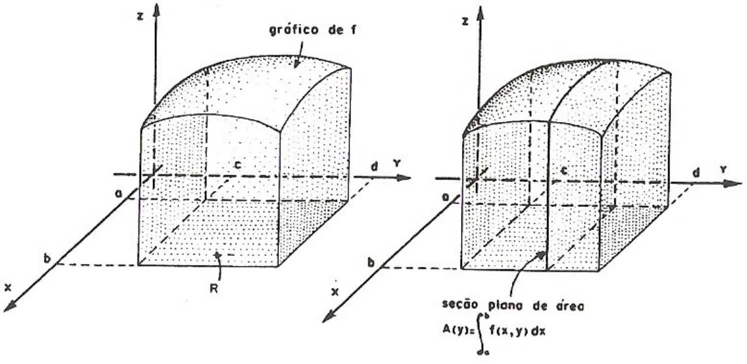


Figura 5.6

Se f é contínua e não negativa num retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, o número que representa a integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\,dxdy$ é o volume do sólido W compreendido entre a superfície de equação $z = f(x,y)$ e o retângulo R.

Para cada y no intervalo $[c,d]$, a integral $A(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ é a área da seção plana do sólido obtida como interseção do plano paralelo ao plano xz passando por $(0,y,0)$ com o sólido. Pelo Princípio de Cavalieri, expressamos o volume de W por $\displaystyle\int_c^d A(y)\,dy$. Portanto,

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy. \tag{5.2}$$

Analogamente, se considerarmos a área da seção plana obtida como interseção do sólido W com o plano paralelo ao plano yz passando por $(x,0,0)$, obtemos

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx. \tag{5.3}$$

Exemplo 5.4: Calcule $\displaystyle\int\int_R (x \operatorname{sen} y - y\,e^x)\,dxdy$, onde $R = [-1,1] \times [0,\pi/2]$.

Solução: Como $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - ye^x$ é contínua no retângulo R, o teorema de Fubini (ver equação (5.2)) fornece

$$\int\int_R (x \operatorname{sen} y - ye^x)\,dxdy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{-1}^{1} (x \operatorname{sen} y - ye^x)dx\right] dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sen} y - ye^x\right]_{x=-1}^{x=1} dy =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \left(-ey + \frac{y}{e}\right) dy &= \\
&= \left[\left(-e + \frac{1}{e}\right) \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\pi/2} &= \\
&= \left(-e + \frac{1}{e}\right) \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

Façamos agora o cálculo da integral usando a equação (5.3):

$$
\begin{aligned}
\int\int_R (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\pi/2} (x \operatorname{sen} y - ye^x) dy\right] dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left[-x \cos y - \frac{y^2}{2} e^x\right]_{y=0}^{y=\pi/2} dx = \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-\frac{\pi^2}{8} e^x + x\right) dx = \\
&= \left[-\frac{\pi^2}{8} e^x + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = \\
&= \left(-e + \frac{1}{e}\right) \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

§5.3 Integral dupla sobre regiões mais gerais

Até agora a integral dupla foi definida apenas para regiões de integração retangulares. Entretanto, não é difícil estender o conceito a regiões mais gerais.

Definição 5.2: Sejam D um subconjunto limitado e fechado do plano xy e $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo que contém D. Seja f uma função contínua (logo limitada)* em D. Definamos uma nova função $\tilde{f}$ (limitada) em R por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \quad (x,y) \in D, \\ \\ 0 & , \quad (x,y) \in R - D. \end{cases}$$

É claro que $\tilde{f}$ é contínua, exceto, possivelmente, na fronteira de D (figura 5.7). Se a fronteira de D consiste de um número finito de gráficos de funções contínuas, então $\tilde{f}$ é integrável sobre R, pelo teorema 5.2. Definamos

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy = \int\int_{R} \tilde{f}(x,y)dxdy.$$

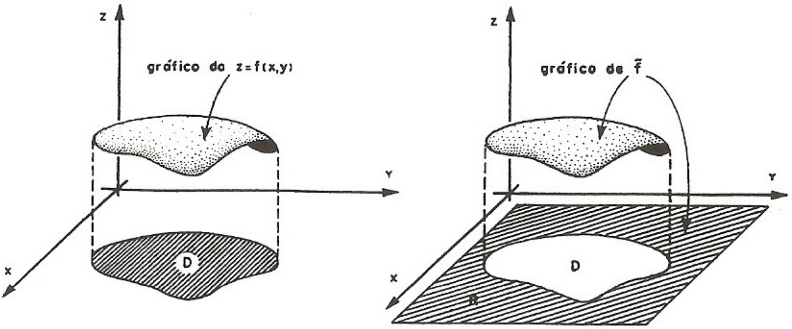


Figura 5.7

A integral $\displaystyle\int\int_{D} f(x,y)\,dxdy$ independe da escolha do retângulo R que contém D, como veremos no teorema 5.4.

Consideremos, primeiramente, um subconjunto D do plano xy descrito do seguinte modo:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

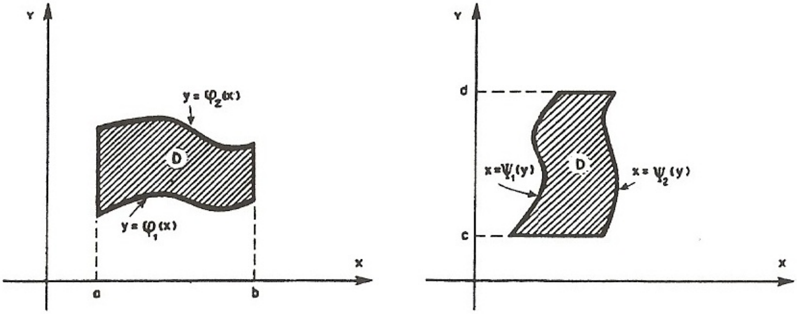
---

*Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e limitado. Toda função real definida e contínua em D é limitada (ver [9], p. 44) onde φ_1 e φ_2 são funções contínuas em $[a, b]$ e $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Tal subconjunto é chamado **região de tipo I**. Um exemplo de uma região deste tipo pode ser visto na figura 5.8(i). Numa região de tipo I, para cada $t \in [a, b]$ a reta $x = t$ intercepta D segundo um segmento de reta compreendido entre as curvas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$. Esta região é fechada e limitada porque φ_1 e φ_2 são contínuas em $[a, b]$.

Uma **região** D **de tipo II** é descrita por

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid c \leq y \leq d \ \text{ e } \ \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\},$$

onde Ψ_1 e Ψ_2 são funções contínuas em $[c, d]$ e $\Psi_1 \leq \Psi_2$. Um exemplo pode ser visto na figura 5.8 (ii). Regiões de tipo II são também fechadas e limitadas.



(i) (ii)

Figura 5.8

Todas as regiões que consideraremos serão de tipo I, de tipo II, ou então poderão ser divididas num número finito de subregiões, cada uma das quais é de tipo I ou II.

Teorema 5.4: *Seja f uma função definida e contínua num subconjunto limitado e fechado $D \subset I\!R^2$.*

Se D é uma região de tipo I, então

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx. \tag{5.4}$$

Se D é uma região de tipo II, então

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)dxdy. \tag{5.5}$$

Demonstração: Demonstraremos apenas (5.4), pois a prova de (5.5) é análoga.

Seja $R = [a,b] \times [c,d]$ um retângulo que contém D. Por definição,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_R \tilde{f}(x,y)dxdy,$$

onde $\tilde{f}$ coincide com f em D e é nula em $R - D$.

Para cada x fixo em $[a,b]$, a função $\tilde{f}(x,y)$ é limitada em $[c,d]$ e contínua, exceto, possivelmente, em dois pontos. Portanto, $\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy$ existe e

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \tilde{f}(x,y)dy.$$

Como $\tilde{f}(x,y) = 0$ para $c < y < \varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x) < y < d$, então

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Da equação (5.3), temos

$$\begin{aligned}\int\int_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dydx = \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

As fórmulas (5.4) e (5.5) mostram que a integral $\displaystyle\int\!\!\int_D f(x,y)\,dxdy$ independe da escolha do retângulo R que contém D.

Observação 5.2: Se $f(x,y)=1$ para todo $(x,y)\in D$, a integral $\displaystyle\int\!\!\int_D 1\ dxdy$ é a área de D.

De fato, consideremos D uma região de tipo I, descrita por

$$D=\{(x,y)\in I\!R^2 \mid a\le x\le b\,,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}.$$

Pela equação (5.4),

$$\int\!\!\int_D dxdy=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dydx \;=\int_a^b(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,dx= \\ =\text{área de } D.$$

Exemplo 5.5: Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_D (x+y)\,dxdy$, onde D é o triângulo de vértices $(-1,0)$, (0,1) e (1,0) (figura 5.9).

Solução: Para cada y fixado entre 0 e 1, temos

$\Psi_1(y)=y-1\le x\le 1-y=\Psi_2(y)$. Portanto, a região D é de tipo II.

Usando a equação (5.5), obtemos

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_D (x+y)\,dxdy &=\int_0^1\int_{y-1}^{1-y}(x+y)dxdy=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=y-1}^{x=1-y}dy= \\ &=\int_0^1(2y-2y^2)dy=\left[y^2-\frac{2y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Observe que esta região D pode ser dividida em duas regiões de tipo I, isto é, $D=D_1\cup D_2$ onde

$$D_1=\{(x,y)\in I\!R^2 \mid -1\le x\le 0,\ \ 0\le y\le x+1\}$$

e

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)dxdy &= \iint_{D_1} (x+y)dxdy + \iint_{D_2} (x+y)dxdy = \\ &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} (x+y)dydx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} (x+y)dydx = \\ &= 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

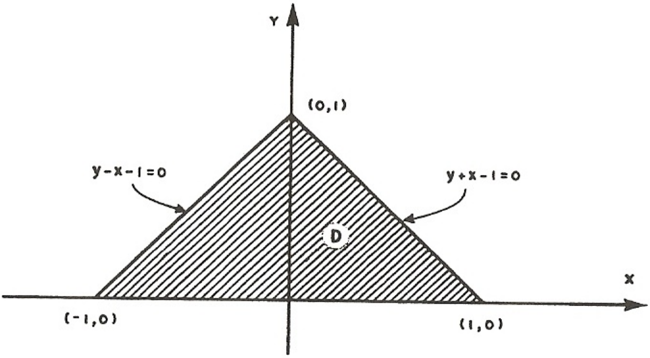


Figura 5.9

Exemplo 5.6: Encontre o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$.

Solução: O volume do sólido pedido é oito vezes o volume do sólido W esboçado na figura 5.10.

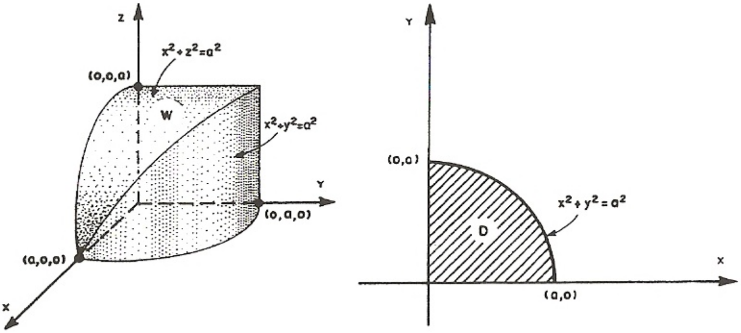


Figura 5.10

A base do sólido W é a região D do plano xy cujos pontos (x,y) satisfazem a $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$.

Para cada $(x,y) \in D$, a altura do sólido W é dada por $z = f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2}$. Então o volume de W é $\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$. Usando a fórmula (5.4), temos

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dydx = \\ &= \int_0^a \left[y\sqrt{a^2-x^2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx = \\ &= \int_0^a (a^2-x^2)dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{2a^3}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido pedido é $\dfrac{16a^3}{3}$.

§5.4 Exercícios

1. Determine a região de integração D e troque a ordem de integração das seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dxdy.$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{\cos x}^{1} f(x,y)\,dydx.$

2. As integrais abaixo não podem ser calculadas exatamente, em termos de funções elementares, com a ordem de integração dada. Inverta a ordem de integração e faça os cálculos.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dxdy.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dydx.$

3. Calcule as integrais, para as regiões D indicadas.

a) $\displaystyle\iint_D y^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dxdy$; D limitada por $y = x^{1/3}, y = -x^{1/3}$ e $x = 8$.

b) $\displaystyle\iint_D \cos(y^3)\,dxdy$; D limitada por $y = \sqrt{x}, y = 2$ e $x = 0$.

c) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dxdy$; D limitada por $y = x^{-2}, y = 1$ e $y = 4$.

d) $\displaystyle\iint_D y^{-2} e^{x/\sqrt{y}}\,dxdy$; D é o quadrado $[0,1] \times [1,2]$.

4. a) Transforme a soma das integrais duplas

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dydx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dydx$$

em uma única integral dupla numa região D conveniente.

b) Calcule a integral dupla em D quando $f(x,y) = xy$.

5. Determine a área da região limitada pelas curvas:

   a) $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y + 4 = 0$.

   b) $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

6. Calcule o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $x = y^2 + 1$ e $x = -y^2 + 9$.

7. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $z = x + 4$ e $z = 0$.

8. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $x + z = 2$ e $x = 2$ para $z \geq 0$.

9. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = y$, $z = 4 - x^2$, $z = 0$ e $y = -4$ com $z \geq 0$.

§5.5 Mudança de variáveis na integral dupla

Um dos objetivos da mudança de variáveis na integral dupla é facilitar o cálculo da integral $\displaystyle\int\int_D f(x, y)\, dxdy$, quando o integrando f ou a região D são tais que a integral não é simples de ser calculada diretamente.

Na integração de funções de uma variável, usamos o método da substituição para simplificar a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Este método é baseado na fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u)) \cdot g'(u)du,$$

onde $a = g(c)$ e $b = g(d)$, sendo g inversível com derivada contínua em $[c, d]$ e f contínua em $[a, b]$.

No caso de funções de duas variáveis, transformaremos a integral dupla $\displaystyle\int\int_D f(x,y)\,dxdy$, onde D é uma região do plano xy, em outra integral dupla $\displaystyle\int\int_Q F(u,v)\,dudv$, onde Q é uma região do plano uv.

Para tal fim, consideremos as funções de u e v definidas por

$$x = x(u,v) \quad \text{e} \quad y = y(u,v). \tag{5.6}$$

Estas equações definem uma aplicação g que associa a cada ponto (u,v) do plano uv um ponto (x,y) do plano xy, isto é,

$$g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

Impondo condições apropriadas sobre $x(u,v)$ e $y(u,v)$, podemos determinar uma região Q do plano uv de modo que g é contínua e injetora em Q e $g(Q) = D$, como mostra a figura 5.11.

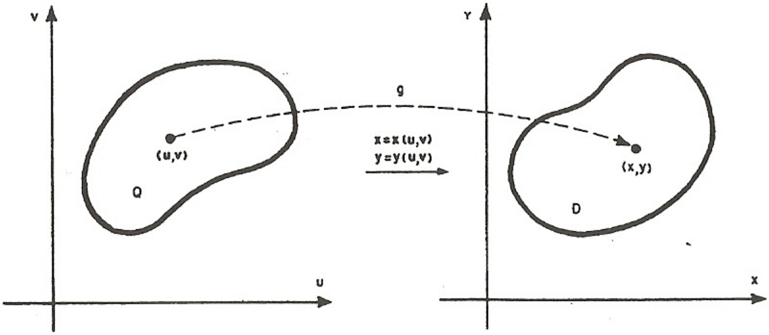


Figura 5.11

O teorema a seguir nos fornece condições sob as quais é possível mudar as variáveis na integral dupla.

Teorema 5.5: *Considere g uma aplicação definida por*

$$g(u,v) = (x(u,v)), y(u,v)),$$

onde x e y são funções de classe C^1 num subconjunto aberto $U \subset I\!R^2$.Seja Q um subconjunto limitado e fechado contido em U tal que

(i) *g é injetora em Q*

e

(ii) *o determinante Jacobiano da aplicação g, $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (também denotado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$), nunca se anula em Q. Se f é integrável em $g(Q)$, então*

$$\int\int_{g(Q)} f(x,y)dxdy = \int\int_{Q} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv. \qquad (5.7)$$

Nota: A fórmula (5.7) ainda é válida se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0$ ou g deixa de ser injetora em subconjuntos de Q que possam ser descritos por um ponto ou pelo gráfico de uma função contínua ou por uma união finita de conjuntos destes dois tipos.

A demonstração deste teorema pode ser vista em Rudin, W., 1976, p. 252-253.

Neste texto nos limitaremos a dar uma justificativa geométrica da fórmula (5.7) quando $f(x,y) = 1$ em $g(Q)$.

Para isto, consideremos P uma partição regular de ordem n de um retângulo R que contém Q. A imagem por g de um segmento de reta horizontal no plano uv (v é constante em tal segmento) é uma curva no plano xy parametrizada no parâmetro u (chamada curva u). Analogamente, a imagem de um segmento de reta vertical é uma curva no plano xy parametrizada no parâmetro v (chamada curva v). Os vetores

$$V_1(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \quad \text{e} \quad V_2(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

são tangentes à curva u e à curva v, respectivamente, no ponto $(x(u,v), y(u,v))$.

Seja R_{uv} um subretângulo de R de dimensões Δu e Δv. Se tomarmos Δu pequeno, podemos considerar V_1 constante ao longo da curva u no intervalo $[u, u+\Delta u]$ e, portanto, o comprimento desta curva é aproximado por $\| V_1 \| \Delta u$. Do mesmo modo, para Δv pequeno, o comprimento da curva v no intervalo $[v, v+\Delta v]$ é aproximado por $\| V_2 \| \Delta v$.

Como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, os vetores V_1 e V_2 são linearmente independentes. Assim a subregião de $g(Q)$ imagem do subretângulo R_{uv} é aproximada por um paralelogramo de lados $V_1\Delta u$ e $V_2\Delta v$ (figura 5.12),

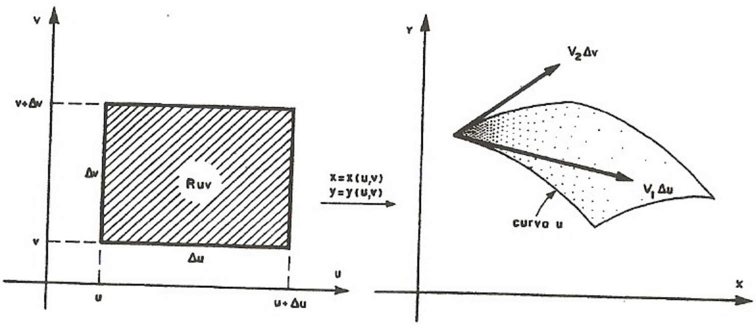


Figura 5.12

cuja área é dada por

$$\| V_1\Delta u \times V_2\Delta v \| = \| V_1 \times V_2 \| \,\Delta u\Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u\Delta v.$$

Logo, a área de $g(Q)$ é aproximada pela soma $\sum \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$ e o limite destas somas é $\int\int_Q \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$.

§5.5.1 Casos especiais de mudança de variáveis

i) **Mudança linear.** Consideremos a transformação linear g definida pelas equações

$$x = au + bv \qquad \text{e} \qquad y = cu + dv, \tag{5.8}$$

onde a, b, c e d são constantes reais. O determinante Jacobiano desta transformação é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Se $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, então o sistema (5.8) pode ser resolvido para u e v em termos de x e y. Portanto, g é injetora em $\mathbb{R}^2$ e a fórmula (5.7) pode ser escrita na forma

$$\int\int_{g(Q)} f(x,y)dxdy = \mid ad - bc \mid \int\int_Q f(au+bv, cu+dv)dudv. \tag{5.9}$$

Exemplo 5.7: Calcule $\int\int_D e^{(y-x)\,/\,(y+x)}\, dxdy$, onde D é a região triangular limitada pela reta $x + y = 2$ e os eixos coordenados.

Solução: A presença dos termos $y - x$ e $y + x$ no integrando sugere a transformação linear definida por

$$u = y - x \qquad\qquad v = y + x, \tag{5.10}$$

cujo determinante Jacobiano é

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Portanto, do exemplo A.9, apêndice, segue que as equações (5.10) definem uma mudança de variáveis linear para x e y como funções de u e v e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

Para encontrarmos a região de integração Q do plano uv notemos que as retas $x = 0$ e $y = 0$ são levadas nas retas $u = v$ e $u = -v$, respectivamente, e a reta $x + y = 2$ é levada na reta $v = 2$. Então a nova região de integração Q é uma região triangular, como mostra a figura 5.13.

Assim, pela fórmula (5.9), temos

$$\begin{aligned} \int\int_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy &= \frac{1}{2}\int\int_Q e^{u/v}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,dudv = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v(e - e^{-1})dv = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

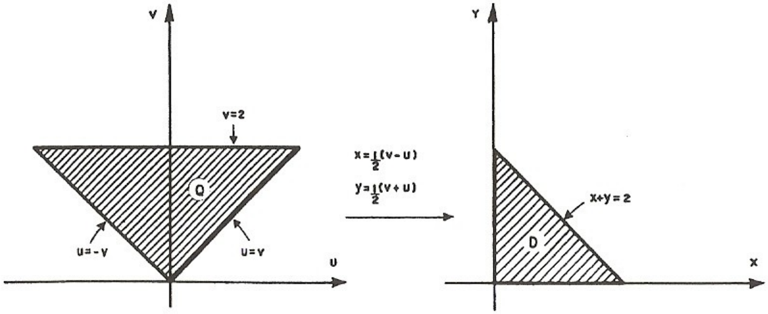


Figura 5.13

ii) **Mudança polar.** Um ponto P com coordenadas retangulares (x, y) tem coordenadas polares (r, θ), onde r é a distância do ponto P à origem e θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga a origem a P (figura 5.14). As coordenadas retangulares e polares do ponto P estão relacionadas por

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{5.11}$$

onde $r \geq 0$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$.

As equações (5.11) definem uma aplicação g do conjunto

$$\{(r,\theta) \in I\!R^2 \mid r \geq 0\ ,\ \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi\}$$

em $I\!R^2$. Esta aplicação é injetora se a restringirmos ao subconjunto

$$\{(r,\theta) \in I\!R^2 \mid r > 0\ ,\ \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi\}.$$

A curva no plano xy imagem de $r = a$ é uma circunferência de raio a centrada na origem.

A curva no plano xy imagem de $\theta =$constante é uma semi-reta que contém a origem.

A figura 5.14 mostra a imagem de um retângulo do plano $r\theta$.

O determinante Jacobiano desta aplicação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Neste caso, a fórmula (5.7) se escreve

$$\int\!\!\int_{g(Q)} f(x,y)\,dxdy = \int\!\!\int_{Q} r\,f(r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{5.12}$$

Pela nota que aparece imediatamente após o teorema 5.5, esta fórmula é válida se Q está contido no conjunto $\{(r,\theta) \in I\!R^2 | r \geq 0\ ,\ \theta_0 \geq \theta \geq \theta_0 + 2\pi\}$.

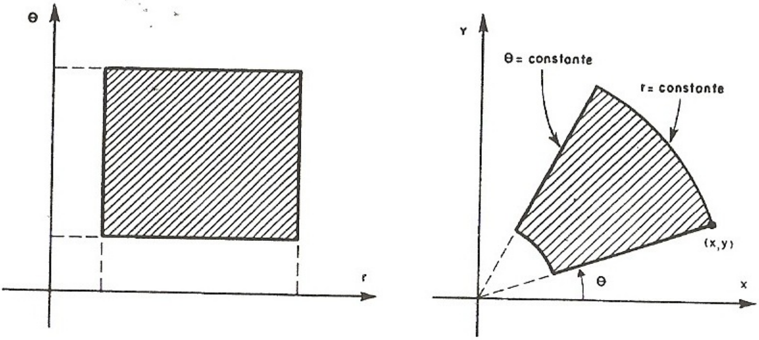


Figura 5.14

Exemplo 5.8: Calcule $\int\int_D ln(x^2+y^2)\, dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante situada entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Solução: Usando a mudança polar

$$x = r\cos\theta\ \ ,\ \ y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

temos que os primeiros quadrantes das circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ são as imagens dos segmentos de reta $r=1$ e $r=2$ com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, respectivamente, e os segmentos de reta $y=0$, $1 \leq x \leq 2$ e $x=0$, $1 \leq y \leq 2$, são as imagens de $\theta = 0$, $1 \leq r \leq 2$, e $\theta = \frac{\pi}{2}$, $1 \leq r \leq 2$, respectivamente. Portanto, a região D é a imagem do retângulo $Q = \{(r,\theta) \in I\!R^2 \mid 1 \leq r \leq 2\,,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ (figura 5.15).

Assim, usando a fórmula (5.12), obtemos

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy &= \int\!\!\int_Q r\ln(r^2)\,drd\theta = \int_1^2\int_0^{\pi/2} 2r\ln r\,d\theta dr = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_1^2 2r\ln r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[r^2\ln r - \frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2} = \\ &= \frac{\pi}{4}(8\ln 2 - 3).\end{aligned}$$

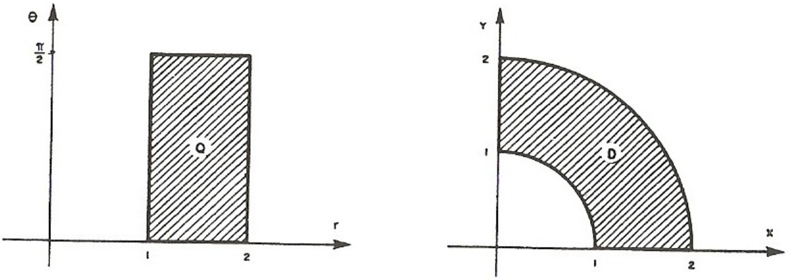


Figura 5.15

Exemplo 5.9: Calcule o volume do sólido W acima do plano xy limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ (figura 5.16).

Solução: Se $(x, y, z) \in W$, então $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ e (x, y) pertence à bola fechada D definida por

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}.$$

Portanto, o volume de W será $\displaystyle\int\!\!\int_D (x^2 + y^2)\,dxdy$.

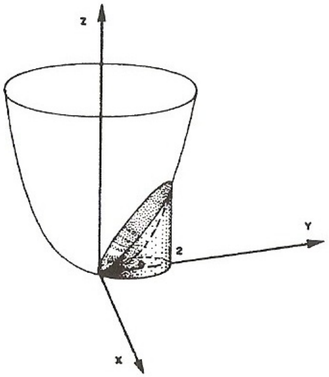


Figura 5.16

Usando a mudança polar definida pelas equações (5.11), verificamos que a fronteira de D cuja equação é $x^2 + y^2 - 2y = 0$ é a imagem da curva $r = 2\operatorname{sen}\theta\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi$. Portanto, D é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r,\theta) \in I\!R^2 \mid 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^3 dr d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\operatorname{sen}\theta} d\theta = 4\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\theta d\theta = \\ &= 4\left[\frac{3}{8}\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen}4\,\theta}{32}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Nos exemplos a seguir, as mudanças de variáveis utilizadas não são casos especiais.

Exemplo 5.10: Determine a área da região D do plano xy limitada pela curva $(2x - 4y + 7)^2 + (x + 5y)^2 = 14$.

Solução: A equação da fronteira de D sugere a aplicação não linear definida por

$$u = 2x - 4y + 7 \qquad \text{e} \qquad v = x + 5y. \tag{5.13}$$

Como o determinante

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

as equações (5.13) definem uma mudança de variáveis para x e y como funções de u e v, cujo determinante Jacobiano, pelo exemplo A.9, apêndice, é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{14}.$$

A região de integração Q do plano uv é limitada pela curva $u^2 + v^2 = 14$. Logo, usando a fórmula (5.7), a área pedida é

$$\int\!\!\int_D dxdy = \frac{1}{14}\int\!\!\int_Q dudv = \frac{1}{14} \cdot \text{área de } Q = \frac{1}{14} \cdot 14\pi = \pi.$$

Exemplo 5.11: Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada pelas hipérboles $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ e $xy = 4$.

Solução: As hipérboles no plano xy sugerem a aplicação definida por

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{e} \qquad v = xy. \tag{5.14}$$

Esta aplicação é injetora em D e o determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2(x^2 + y^2) \neq 0.$$

Pelo exemplo A.9, apêndice, segue que as equações (5.14) definem uma mudança de variáveis para x e y como funções de u e v, e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + 4v^2}},$$

visto que $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = u^2+4v^2$.

A região de integração Q no plano uv é o retângulo

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 9, 2 \leq v \leq 4\} \text{ (figura 5.17).}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int\!\!\int_D (x^2+y^2)\,dxdy &= \int\!\!\int_Q \sqrt{u^2+4v^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\,dudv = \frac{1}{2}\int\!\!\int_Q dudv = \\ &= \frac{1}{2}\text{área de } Q = 8. \end{aligned}$$

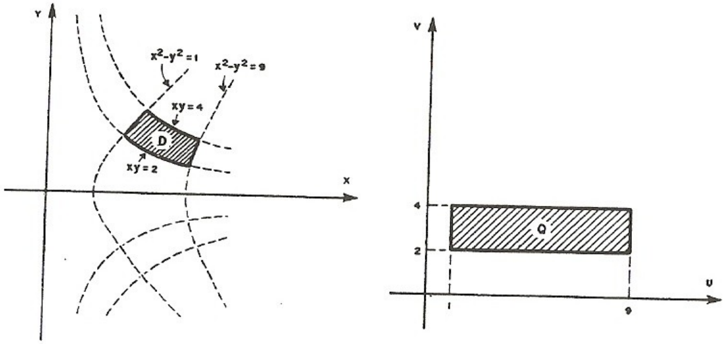


Figura 5.17

§5.6 Exercícios

1. Considere a aplicação definida por

$$x = uv \qquad \text{e} \qquad y = v - u.$$

a) Determine a imagem D no plano xy do retângulo R no plano uv de vértices $(0,1), (1,1), (1,2)$ e $(0,2)$.

b) Calcule a área de D.

2. Considere a aplicação g definida pelas equações

$$x = u + v \qquad \text{e} \qquad y = v - u^2.$$

a) Utilizando g, calcule $\displaystyle\iint_D \left(x - y + \frac{1}{4}\right)^{-1/2} dxdy$, onde D é a imagem no plano xy da região Q no plano uv limitada pelas retas $u = 0$, $v = 0$ e $u + v = 2$.

b) Descreva e esboce a região D.

3. Calcule $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$, onde D é a região do plano xy limitada por $x + y = 1$, $x = 0$ e $y = 0$.

4. Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y+2x}{\sqrt{y-2x-1}} dxdy$, onde D é a região do plano xy limitada pelas retas $y - 2x = 2$, $y + 2x = 2$, $y - 2x = 1$ e $y + 2x = 1$.

5. Calcule $\displaystyle\iint_D (2x+1)\, dxdy$, onde D é a região no primeiro quadrante do plano xy, limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $x + y = 1$ e $x + y = 2$.

6. Calcule $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$, onde D é a região do plano xy limitada pelas parábolas $x = y^2 - 1$, $x = 1 - y^2$ e $x = 4 - \dfrac{y^2}{4}$.

Sugestão: use a mudança de variáveis $x = u^2 - v^2$, $y = uv$.

7. Calcule, usando mudança polar, as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy$, onde D é a região no primeiro quadrante do plano xy limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

c) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$.

8. Determine a área da região D do plano xy definida por
$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \le 4 \text{ e } x^2 + y^2 \ge 4\}$.

9. Determine a área da lemniscata $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

10. Determine o volume dos sólidos W abaixo.

a) W é limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ e o plano $z = 10$.

b) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 25 \text{ e } x^2 + y^2 \ge 9\}$.

c) W é limitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2y$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) W é o sólido acima do plano xy limitado pelas superfícies $z = 0$, $x + y + z = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.

11. Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{e^{(x+y)/(x-y)}}{(x-y)^2}\,dxdy$, onde
$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 1 \le (x-y)^2 + (x+y)^2 \le 4,\ y \le 0 \text{ e } x + y \ge 0\}$.

12. a) Calcule a integral dupla

$$I(p,a) = \iint_D \frac{dxdy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}\ , \text{ onde}$$

$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$.

b) Determine todos os valores de p para os quais $I(p,a)$ tem um limite finito quando a tende para $+\infty$.

13. Se $a > 0$, seja $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-u^2}.du$.

a) Mostre que

$$I^2(a) = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \text{ onde } D = [-a, a] \times [-a, a].$$

b) Se B_1 e B_2 são as bolas fechadas inscrita e circunscrita a D, respectivamente, mostre que

$$\iint\limits_{B_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I^2(a) \leq \iint\limits_{B_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

c) Calcule as integrais sobre B_1 e B_2, e use b) para mostrar que $I(a)$ tende para $\sqrt{\pi}$ quando a tende para $+\infty$. Isto prova que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

§5.7 Centro de massa e momento de inércia

Muitos conceitos, tais como massa, centro de massa e momento de inércia, podem ser definidos com o auxílio de integrais duplas. Nesta seção, faremos uma breve discussão destes tópicos.

Se P denota um vetor no plano com origem em $(0{,}0)$ e extremidade num ponto arbitrário e se n massas $m_1, \cdots, m_n$ estão localizadas nos pontos $P_1, \cdots, P_n$, respectivamente, o **centro de massa** do sistema é definido como sendo o ponto C determinado pela equação

$$C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k P_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},$$

onde o denominador $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ é chamado **massa total do sistema**

Se cada massa m_k é transladada de um vetor dado A para um novo ponto Q_k, onde $Q_k = P_k + A$, o centro de massa é também transladado de A, pois

$$\frac{\sum m_k Q_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k (P_k + A)}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k P_k}{\sum m_k} + A = C + A.$$

Isto mostra que a localização do centro de massa independe da origem, dependendo apenas dos pontos $P_1, \cdots, P_n$ e das massas.

O centro de massa pode ser pensado como o **"ponto de equilíbrio"** do sistema.

Se as massas estão localizadas nos pontos de coordenadas $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, e se o centro de massa C tem coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, a relação que define C pode ser representada pelas duas equações escalares

$$\overline{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

No numerador do quociente que define $\overline{x}$, a $k-$ésima parcela da soma, $m_k x_k$, é chamada **momento da massa m_k com relação ao eixo y**. Se a massa m igual à massa total do sistema fosse colocada no centro de massa, seu momento em relação ao eixo y seria igual ao momento do sistema,

$$m\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

Quando consideramos um sistema cuja massa total está distribuída numa região do plano e não apenas num conjunto formado por um número finito de pontos, os conceitos de massa, centro de massa e momento são definidos por meio de integrais duplas. Por exemplo, consideremos uma lâmina fina tendo a forma de uma região D do plano e assumamos que a massa está distribuída sobre esta lâmina com densidade (massa por unidade de área) conhecida, isto é, existe uma função positiva f definida em D tal que $f(x, y)$ representa a massa por unidade de área em (x, y). Se a lâmina é feita de material homogêneo, a densidade é constante. Neste caso, a massa total da lâmina é o produto da densidade pela área da lâmina.

Quando a densidade f varia de ponto para ponto e f é integrável sobre D, podemos concluir, utilizando somas de Riemann, que a **massa total de D** é dada pela equação

$$m(D) = \int\int_D f(x,y)dxdy, \tag{5.15}$$

e que o **centro de massa** $c = (\overline{x}, \overline{y})$ **da lâmina** é determinado pelas equações

$$\overline{x} = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{m(D)} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{\int\int_D yf(x,y)dxdy}{m(D)}. \tag{5.16}$$

Quando a densidade é constante, digamos $f(x,y) = k$, as equações (5.16) tornam-se

$$\overline{x} = \frac{\int\int_D xdxdy}{\text{área}(D)} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{\int\int_D ydxdy}{\text{área}(D)}.$$

Neste caso, o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ é chamado **centróide da lâmina** (ou da região D).

Exemplo 5.12: Calcule a massa e o centro de massa de um semicírculo D de raio a e centro na origem, sabendo que a densidade no ponto P é proporcional à distância do ponto ao centro do círculo.

Solução: A densidade num ponto P de coordenadas (x,y) é dada por

$$f(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2},$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Pela fórmula (5.15), a massa do semicírculo D é dada por

$$m(D) = k\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Usando mudança polar, temos

$$m(D) = k\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 drd\theta = \frac{k\pi a^3}{3}.$$

Por (5.16), o centro de massa de D é o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, onde

$$\overline{x} = \frac{k \int\int_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{m(D)} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{k \int\int_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{m(D)}.$$

Como

$$\int\int_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^a \int_0^\pi r^3 \cos\theta d\theta dr = 0$$

e

$$\int\int_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^a \int_0^\pi r^3 \operatorname{sen}\theta d\theta dr = \frac{a^4}{2},$$

o centro de massa de D é o ponto $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \dfrac{a^4}{2}\right)$.

Se L é uma reta no plano da lâmina D, seja $\delta(x, y)$ a distância do ponto (x, y) em D à reta L. O número I_L definido pela equação

$$I_L = \int\int_D \delta^2(x,y) f(x,y) dxdy,$$

onde $f(x, y)$ é a densidade em cada ponto (x, y) de D, é chamado **momento de inércia da lâmina em relação à reta** L. Os momentos de inércia em relação ao eixo x e ao eixo y, denotados por I_x e I_y, respectivamente, são dados pelas integrais

$$I_x = \int\int_D y^2 f(x,y) dxdy \tag{5.17}$$

e

$$I_y = \int\int_D x^2 f(x,y) dxdy. \tag{5.18}$$

A soma $I_x + I_y$ é chamada **momento de inércia polar em relação à origem**, denotado por I_0. Logo,

$$I_0 = \int\int_D (x^2+y^2) f(x,y) dxdy. \tag{5.19}$$

Exemplo 5.13: Uma lâmina fina com densidade constante k é limitada por duas circunferências concêntricas de raios a e b, e centro na origem, onde $0 < a < b$. Calcule seu momento de inércia polar.

Solução: Por (5.19), o momento de inércia polar da lâmina D é dado por

$$I_0 = k \int\int_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$. Usando mudança polar para calcular a integral, obtemos

$$I_0 = k \int_0^{2\pi} \int_a^b r^3 dr d\theta = k\pi \frac{b^4 - a^4}{2}.$$

§5.8 Exercícios

Nos exercícios 1 a 5, suponha que uma lâmina com densidade f ocupe a região D do plano xy. Calcule a massa total m e as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centro de massa de D.

1. $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$; $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2. $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}$; $f(x, y) = y + 3$.

3. D é a região triangular de vértices (0,0), (3,0) e (3,5) e a densidade f em cada ponto $P = (x, y) \in D$ é igual à distância de P ao eixo y.

4. $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x + 1\}$ e a densidade f num ponto $P \in D$ é igual ao produto das coordenadas do ponto P.

5. D é a região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = x + x^2$, $y = 0$, e $x = 2$; $\quad f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x}$.

Nos exercícios 6 a 10, calcule os momentos de inércia I_x e I_y de uma lâmina D no plano xy limitada por uma ou mais curvas descritas pelas equações dadas. Em cada caso, $f(x, y)$ denota a densidade num ponto (x, y) de D.

6. $y = 2 - x, x = 0, y = 0$; $f(x, y) = x + 2y$.
7. $y = e^x, y = 0, 0 \leq x \leq 1$; $f(x, y) = xy$.
8. $x^2 + y^2 = a^2$; $f(x, y) = k(x^2 + y^2)^{3/2}$.
9. $xy = 1, xy = 2, x = 2y, y = 2x, x > 0, y > 0$; $f(x, y) = 1$.
10. $y = \sqrt{2x}, y = 0, 0 \leq x \leq 2$; $f(x, y) = \mid x - y \mid$.

§5.9 Integrais triplas

Definiremos integrais triplas através de somas de Riemann, de modo análogo ao que foi feito para integrais duplas.

Seja $\omega = f(x, y, z)$ uma função real definida e limitada num paralelepípedo (caixa) retangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Se P_1, P_2 e P_3 são partições regulares de ordem n de $[a, b]$, $[c, d]$ e $[p, q]$, respectivamente, o produto cartesiano $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ é chamado uma partição regular de ordem n de R, a qual subdivide a caixa R em n^3 caixas denotadas por R_{ijk}. Podemos então formar a soma de Riemann S_n de $\omega = f(x, y, z)$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

onde c_{ijk} é um ponto qualquer de R_{ijk} e $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$, $\Delta z = \dfrac{q-p}{n}$.

Definição 5.3: Seja $\omega = f(x, y, z)$ uma função definida e limitada na caixa retangular R. Se $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ é um número real s que independe da escolha de

c_{ijk} em R_{ijk}, chamamos este limite de integral tripla de f sobre R, e o denotamos por

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz \qquad \text{ou} \qquad \iiint\limits_R f(x,y,z)dV.$$

Conforme o teorema 5.1, "*Toda função* $\omega = f(x,y,z)$ *contínua em* R *é integrável sobre* R". Além disso, funções limitadas cujos conjuntos de descontinuidades podem ser descritos como união finita de gráficos de funções contínuas (tais como $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ ou $z = z(x,y)$) são integráveis. Isto é análogo ao teorema 5.2.

Como no caso de funções de duas variáveis, o Teorema de Fubini é válido: "*Se* $f(x,y,z)$ *é contínua em* R *então*

$$\begin{aligned}\iiint\limits_R f(x,y,z)dV &= \int_a^b\int_c^d\int_p^q f(x,y,z)dzdydx &=\\ &= \int_c^d\int_a^b\int_p^q f(x,y,z)dzdxdy &=\\ &= \cdots &=\\ &= \int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)dydxdz." \end{aligned}$$

(É possível encontrar seis integrais iteradas para funções de três variáveis.)

Para completar a analogia com as integrais duplas, consideremos o problema de calcular integrais triplas sobre regiões fechadas e limitadas $W \subset \mathbb{R}^3$ (tais regiões estão contidas em alguma caixa retangular R). Dada uma função contínua $\omega = f(x,y,z)$ definida em W, a estendemos a uma função $\tilde{f} : R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que coincide com f em W e se anula em $R - W$. Se a fronteira de W consiste de uma união finita de gráficos de funções contínuas, então $\tilde{f}$ é integrável em R e definimos

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)dV = \iiint\limits_R \tilde{f}(x,y,z)dV.$$

Como antes, esta integral independe da escolha de R.

Aqui também, restringiremos nossa atenção a três tipos especiais de regiões do $I\!R^3$.

Uma região $W \subset I\!R^3$ é dita de **tipo I** se pode ser descrita por

$$W = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid (x, y) \in D \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\},$$

onde D é a região limitada e fechada, projeção de W no plano xy, e f_1, f_2 são funções contínuas em D, com $f_1 \leq f_2$.

Regiões deste tipo são limitadas por duas superfícies de equações $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$ e (talvez) por uma porção de cilindro gerada por uma reta se movendo paralelamente ao eixo z ao longo da fronteira de D (figura 5.18). Neste caso,

$$\int\!\!\int\!\!\int_W f(x, y, z)dxdydz = \int\!\!\int_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy. \qquad (5.20)$$

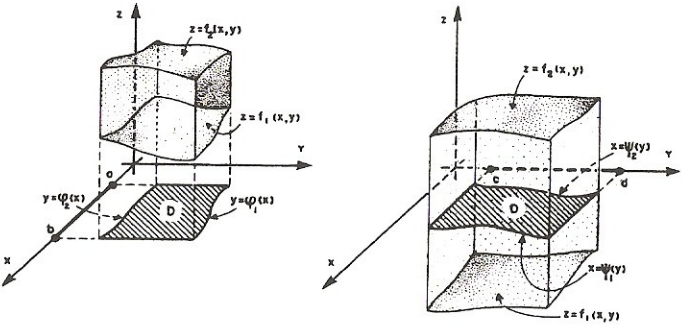


Figura 5.18

Uma região $W \subset \mathbb{R}^3$ é de **tipo II** se pode ser descrita por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D \text{ e } g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\},$$

onde D é a região limitada e fechada, projeção de W no plano xz, e g_1, g_2 são contínuas em D, com $g_1 \leq g_2$. Neste caso,

$$\iiint\limits_W f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)dy \right) dxdz. \qquad (5.21)$$

Finalmente, $W \subset \mathbb{R}^3$ é de **tipo III** se pode ser descrita por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D \text{ e } h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\},$$

onde D é a região limitada e fechada, projeção de W no plano yz, e h_1, h_2 são funções contínuas em D, com $h_1 \leq h_2$. Assim,

$$\iiint\limits_W f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right) dydz. \qquad (5.22)$$

Observação 5.3:

1. Se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in W$, então

$$\iiint\limits_W dxdydz = \text{ volume de } W.$$

2. Se $f(x, y, z)$ é a função que fornece a densidade (massa por unidade de volume) em cada ponto $(x, y, z) \in W$, então a massa M de W é dada por

$$M = \iiint\limits_W f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Exemplo 5.14: Calcule o volume do sólido W limitado pelas superfícies de equações $z + x^2 = 9$, $y + z = 4$, $y = 0$ e $y = 4$.

Solução: O sólido W é limitado superiormente pela superfície $z = 9 - x^2$ e inferiormente pelo plano $z = 4 - y$. Portanto,

$$W = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 \mid 4 - y \leq z \leq 9 - x^2 \text{ e } (x,y) \in D\},$$

onde D é a projeção de W no plano xy (figura 5.19) que pode ser descrita por

$$D = \{(x,y) \in I\!\!R^2 \mid -\sqrt{y+5} \leq x \leq \sqrt{y+5}, 0 \leq y \leq 4\}.$$

Assim, da observação 5.3.1 e da fórmula (5.20) segue que o volume de W é

$$\begin{aligned}
&= \iiint\limits_W dxdydz = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} \left(\int_{4-y}^{9-x^2} dz \right) dxdy = \\
&= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} (5 - x^2 + y)dxdy = \int_0^4 \left[5x - \frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=-\sqrt{y+5}}^{x=\sqrt{y+5}} dy = \\
&= \int_0^4 \left(10(y+5)^{1/2} - \frac{2}{3}(y+5)^{3/2} + 2y(y+5)^{1/2} \right) dy = \\
&= \left[\frac{20}{3}(y+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(y+5)^{5/2} + \frac{4}{5}(y+5)^{5/2} - \frac{20}{3}(y+5)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=4} = \\
&= \left[\frac{8}{15}(y+5)^{5/2} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{8}{15}(243 - 25\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

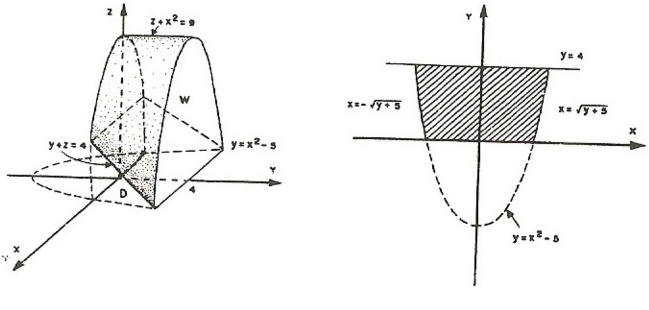


Figura 5.19

§5.10 Mudança de variáveis na integral tripla

Como veremos a seguir, a fórmula de mudança de variáveis na integral dupla pode ser estendida às integrais triplas.

Seja $g\colon\ U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pelas equações

$$x = x(u,v,s) \qquad , \qquad y = y(u,v,s) \qquad \text{e} \qquad z = z(u,v,s),$$

onde x, y, z são funções com derivadas parciais contínuas no subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$.

O determinante Jacobiano da aplicação g é $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}$ (também denotado por $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,s)}$).

Se g é injetora num subconjunto fechado e limitado Q contido em U e $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,s)}$ nunca se anula em Q, então

$$\iiint\limits_{g(Q)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q} f(x(u,v,s), y(u,v,s), z(u,v,s)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,s)}\right| dudvds. \qquad (5.23)$$

Esta fórmula ainda é válida para funções de três variáveis, sob as condições da nota que aparece imediatamente após o teorema 5.5.

§5.10.1 Casos especiais de mudanças de variáveis

i) Mudança de variáveis cilíndricas

Um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem coordenadas cilíndricas (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy (figura 5.20). As coordenadas retangulares e cilíndricas do ponto P estão relacionadas por

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad z = z, \tag{5.24}$$

onde $r \geq 0$, θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ e $-\infty < z < +\infty$.

As equações (5.24) definem uma aplicação $g: \ U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Esta aplicação é injetora quando restrita ao conjunto

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi \quad \text{e} \quad -\infty < z < +\infty\}.$$

A superfície no espaço xyz imagem de $r = a$ é um cilindro de raio a com eixo coincidente com o eixo z.

A superfície imagem de θ =constante é um semiplano que contém o eixo z.

A superfície imagem de z =constante é um plano paralelo ao plano xy.

A figura 5.20 mostra a imagem de uma caixa retangular no espaço $r\theta z$.

O determinante Jacobiano desta aplicação é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

Portanto, a fórmula (5.23) se escreve

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{Q} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,rdrd\theta dz. \tag{5.25}$$

Esta fórmula ainda é válida se Q está contido num conjunto da forma

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \geq 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty\}.$$

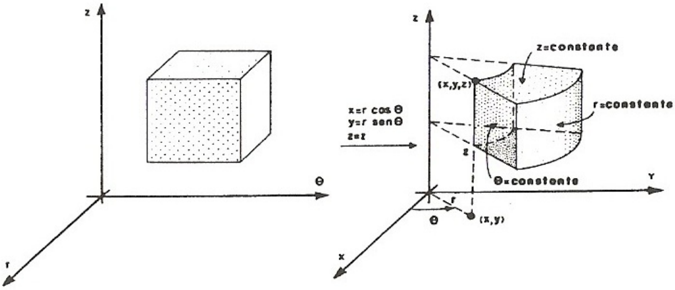


Figura 5.20

Exemplo 5.15: Calcule $\displaystyle\iiint\limits_W z\,dxdydz$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ e $2z = x^2 + y^2$.

Solução: Se $(x, y, z) \in W$, então $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ e $(x, y) \in D$, onde D é a projeção de W no plano xy (figura 5.21).

As superfícies se interceptam segundo a curva $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2$. Portanto, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Usando mudança de variáveis cilíndricas

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad , \qquad z = z,$$

observamos que W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{e} \quad \frac{r^2}{2} \leq z \leq \sqrt{8 - r^2}\}.$$

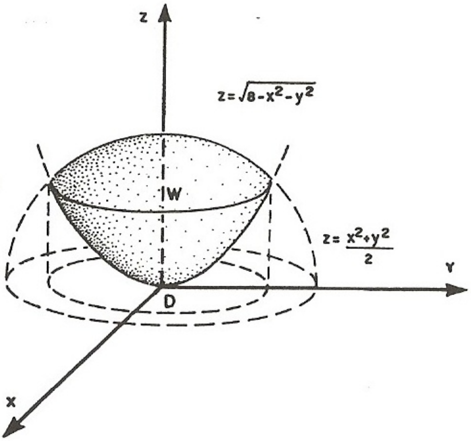


Figura 5.21

Portanto, da fórmula (5.25) segue que

$$\iiint\limits_W z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_Q rz\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{8-r^2}} rz\,dz\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\left(8 - r^2 - \frac{r^4}{4}\right) d\theta\,dr =$$

$$= \pi\left[4r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{28\pi}{3}.$$

ii) Mudança de variáveis esféricas

Um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem coordenadas esféricas (ρ, θ, φ), onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga (0,0) a (x, y), e φ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem (figura 5.22). As coordenadas retangulares e esféricas do ponto P estão relacionadas por

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = \rho\cos\varphi, \quad (5.26)$$

onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$.

As equações (5.26) definem uma aplicação $g: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Esta aplicação é injetora quando restrita ao conjunto

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho > 0, \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

A superfície no espaço xyz imagem de $\rho =$constante é uma esfera centrada na origem.

A superfície imagem de $\theta =$constante é um semiplano que contém o eixo z.

A superfície imagem de $\varphi =$constante é um cone circular cujo eixo coincide com o eixo z.

A figura 5.22 mostra a imagem de uma caixa retangular no espaço $\rho\theta\varphi$.

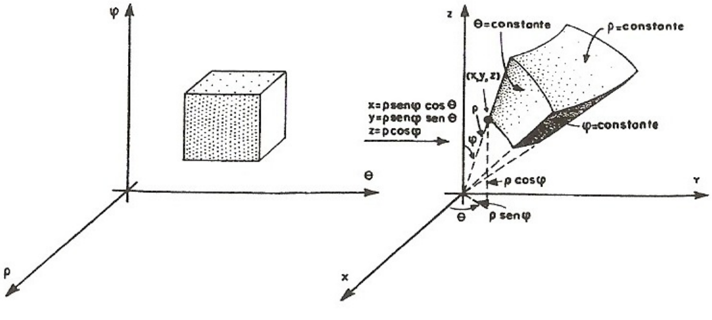


Figura 5.22

O determinante Jacobiano desta aplicação é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\varphi.$$

Como $\operatorname{sen}\varphi \geq 0$ para $0 \leq \varphi \leq \pi$, então $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Portanto, a fórmula (5.23) se escreve

$$\iiint_{g(Q)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{Q} f(\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\theta d\varphi. \quad (5.27)$$

Esta fórmula ainda é válida se Q está contido num conjunto da forma

$$\{(\rho,\theta,\varphi) \in I\!R^3 \mid \rho \geq 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Exemplo 5.16: Calcule $\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, onde W é o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e os cones $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ (figura 5.23).

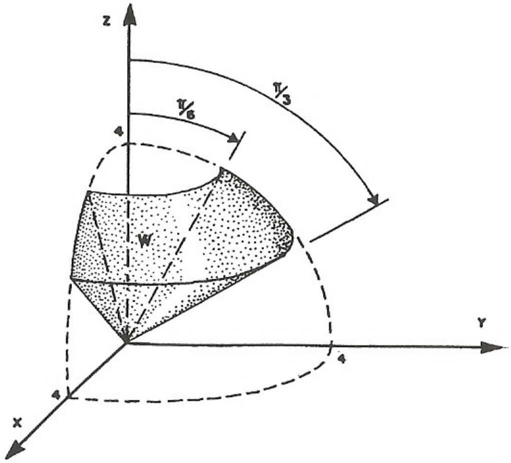


Figura 5.23

Solução: Usando a mudança de variáveis esféricas definida por (5.26), temos que a esfera $x^2+y^2+z^2=16$ é a imagem de $\rho=4$, e os cones $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ são as imagens de $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ e $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, respectivamente. Portanto, W é a imagem do conjunto

$$Q=\{(\rho,\theta,\varphi)\in I\!R^3 \mid 0\leq\rho\leq 4, \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}\}.$$

Assim, da fórmula (5.27), segue que

$$\begin{aligned}\iiint\limits_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz &= \iiint\limits_Q \rho^2 e^{\rho^3}\operatorname{sen}\varphi\, d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3}\operatorname{sen}\varphi\, d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\frac{e^{\rho^3}}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=4}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{6}(e^{64}-1)\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{12}(\sqrt{3}-1)(e^{64}-1).\end{aligned}$$

Exemplo 5.17: Calcule $\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde W é o sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ e inferiormente pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (figura 5.24).

Solução: Usando a mudança de variáveis esféricas definida por (5.26), a esfera $x^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ é a imagem de $\rho=\cos\varphi$, e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ é a imagem de $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Portanto, W é a imagem do conjunto

$$Q=\{(\rho,\theta,\varphi)\in I\!R^3 \mid 0\leq\rho\leq\cos\varphi, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi \quad \text{e} \quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\}.$$

Logo, da fórmula (5.27), temos

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{W} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \iiint\limits_{Q} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\varphi \cos^4\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{\pi}{10} \left[\cos^5\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = \frac{\pi}{10}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\end{aligned}$$

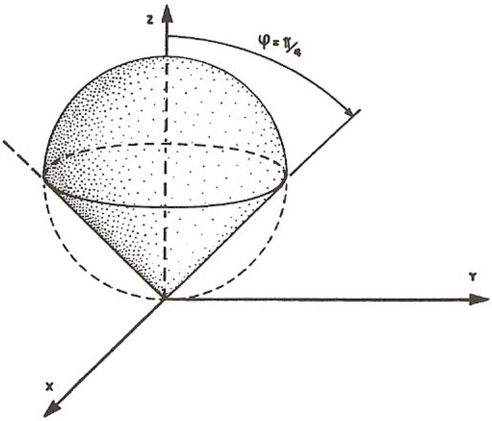


Figura 5.24

§5.11 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais triplas:

   a) $\iiint\limits_{W} z\, dxdydz$, onde W é a região no primeiro octante limitada pelos planos $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2y+x=6$ e o cilindro $y^2+z^2=4$.

   b) $\iiint\limits_{W} xy^2z^3\, dxdydz$, onde W é a região no primeiro octante limitada pela superfície $z=xy$ e os planos $y=x$, $x=1$ e $z=0$.

c) $\displaystyle\iiint\limits_W z\,dxdydz$, onde W é a região limitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $y = x^2$, $z = 0$ e $y = 1$.

d) $\displaystyle\iiint\limits_W y\cos(x+z)\,dxdydz$, onde W é a região limitada pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $x + z = \dfrac{\pi}{2}$ e $z = 0$.

2. Calcule o volume dos sólidos W descritos abaixo.

a) W é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

b) W é limitado pelas superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

c) W é limitado pelas superfícies $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = y$, está situado no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, e $z \geq 0$.

d) W é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, pelo cilindro $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2} = x$ e pelo plano $z = 0$.

e) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid z \geq 1, x + y + z \leq 7, x \geq y^2\}$.

f) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \,\text{e}\, z^2 \leq x^2 + y^2\}$.

g) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

h) $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 4, x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 \leq 2\,, z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$.

4. Calcule as integrais triplas abaixo, usando uma mudança de variáveis conveniente.

a) $\displaystyle\iiint\limits_W z\,dxdydz$, onde
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0, x^2+y^2 \geq \frac{1}{4}\}$.

b) $\displaystyle\iiint\limits_W \frac{dxdydz}{z^2}$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ e $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

c) $\displaystyle\iiint\limits_W z\,dxdydz$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ e $x^2+y^2+z^2 = 4$.

d) $\displaystyle\iiint\limits_W xyz\,dxdydz$, onde
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

e) $\displaystyle\iiint\limits_W (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dxdydz$, onde W é a região dada por:
i) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$.
ii) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq x\}$.

f) $\displaystyle\iiint\limits_W \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, onde W é o sólido definido por
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 2y, z \leq \sqrt{x^2+y^2}, y \geq x \text{ e } x \geq 0\}$.

g) $\displaystyle\iiint\limits_W x\,dxdydz$,onde
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2+(y-1)^2+z^2 \leq 9, x \geq 0, z \geq 0\}$.

5. Sabendo que a densidade em cada ponto de um sólido W é dada por $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$, determine a massa de W quando

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \geq 2y\}.$$

CAPÍTULO 6

INTEGRAIS DE LINHA

A integral $\int_a^b f(x)dx$ de uma função real de uma variável real pode ser generalizada de vários modos (um deles já visto no capítulo 5). Uma generalização que possui diversas aplicações importantes, inclusive na Física, é a integral de linha, a qual descreveremos a seguir.

§6.1 Integral de linha de função escalar

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função real e C uma curva em $\mathbb{R}^3$, definida pela função

$$\begin{aligned} \sigma : I = [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Para motivar a definição de integral de linha de f ao longo de C, vamos supor que C representa um arame e $f(x,y,z)$ a densidade (massa por unidade de comprimento) em cada ponto $(x,y,z) \in C$. Queremos calcular a massa total M do arame.

Para isto, dividamos o intervalo $I = [a,b]$ por meio da partição regular de ordem n $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} \cdots < t_n = b$, obtendo assim uma decomposição de C em curvas C_i definidas em $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, como na figura 6.1.

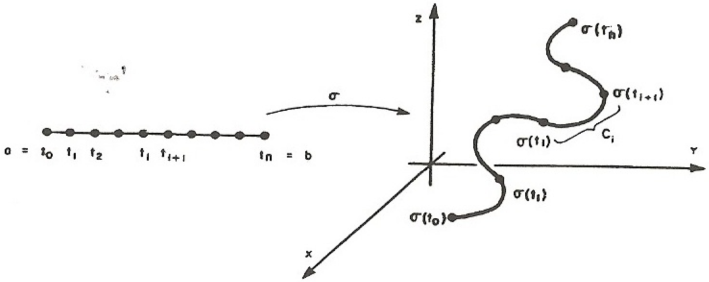


Figura 6.1

Supondo que $\sigma(t)$ é de classe C^1, e denotando por Δs_i o comprimento da curva C_i, tem-se

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| \sigma'(t) \| \, dt.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que $\Delta s_i = \| \sigma'(u_i) \| (t_{i+1} - t_i) = \| \sigma'(u_i) \| \Delta t_i$, onde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Quando n é grande, Δs_i é pequeno e $f(x, y, z)$ pode ser considerada constante em C_i e igual a $f(\sigma(u_i))$. Portanto, a massa total M é aproximada por

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma(u_i)) \| \sigma'(u_i) \| \Delta t_i.$$

A soma S_n é uma soma de Riemann da função $f(\sigma(t)) \| \sigma'(t) \|$ no intervalo $[a, b]$. Logo, se considerarmos $f(x, y, z)$ contínua em C, então

$$M = \int_a^b f(\sigma(t)) \| \sigma'(t) \| \, dt.$$

Definição 6.1: Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, onde σ é de classe C^1, e $f(x, y, z)$ uma função real contínua em C. Definimos a **integral de linha de f ao longo de C** por

$$\int_C f ds = \int_C f(x,y,z) ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \parallel \sigma'(t) \parallel dt. \tag{6.1}$$

Esta fórmula ainda é válida se σ é C^1 por partes ou $f \circ \sigma$ é contínua por partes. Neste caso, a integral $\int_C f(x,y,z)ds$ é calculada dividindo-se o intervalo $[a,b]$ em um número finito de intervalos fechados onde $f(\sigma(t)) \parallel \sigma'(t) \parallel$ é contínua.

No caso particular em que $f(x,y,z) = 1$ se $(x,y,z) \in C$, obtemos, pela fórmula (6.1),

$$\int_C ds = \int_a^b \parallel \sigma'(t) \parallel dt = \text{ comprimento da curva } C.$$

Exemplo 6.1: Calcule $\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$, onde C é a hélice definida por $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$. Portanto, σ é de classe C^1 em $[0,2\pi]$ e $\parallel \sigma'(t) \parallel = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$. Como f é contínua, então de (6.1) segue que

$$\begin{aligned}\int_C (x^2+y^2+z^2)ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+t^2)dt = \\ &= \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2).\end{aligned}$$

Se pensarmos na hélice como um arame e $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ como a densidade de massa no arame, então a massa total do arame é $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2)$.

Um caso particular da integral de linha definida em (6.1) ocorre quando a curva C é uma curva no plano xy definida por uma função de classe C^1, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, e $f(x, y)$ é uma função real contínua definida em C.

Neste caso, a **integral de linha de f ao longo de C** é

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \parallel \sigma'(t) \parallel dt. \tag{6.2}$$

Quando $f(x, y) \geq 0$ em C, a fórmula (6.2) tem como interpretação geométrica a "*área de uma cerca*" que tem como base a curva C e altura $f(x, y)$ em cada $(x, y) \in C$ (figura 6.2). Deixamos a justificativa desta interpretação para o leitor.

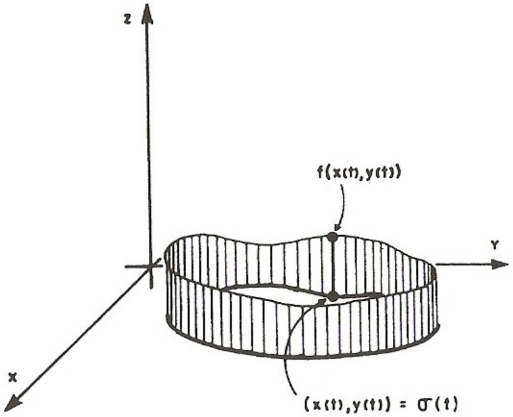


Figura 6.2

Exemplo 6.2: A base de uma cerca é uma curva C no plano xy definida por $x(t) = 30 \cos^3 t$, $\quad y(t) = 30 \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e a altura em cada ponto $(x, y) \in C$ é dada por $f(x, y) = 1 + \dfrac{|\, y \,|}{3}$ (x e y em metros). Se para pintar cada m^2 um pintor cobra p reais, quanto o pintor cobrará para pintar a cerca?

Solução: A base da cerca no primeiro e segundo quadrantes é a porção de C dada por $\sigma(t) = (30\cos^3 t, 30\,\text{sen}^3\, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, e a altura da cerca em cada ponto (x, y) é $f(x, y) = 1 + \dfrac{y}{3}$ (figura 6.3).
Visto que $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-90\cos^2 t\,\text{sen}\, t, 90\,\text{sen}^2\, t\cos t)$, então σ é de classe C^1 e

$$\| \sigma'(t) \| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(90)^2\cos^4 t\,\text{sen}^2\, t + (90)^2\,\text{sen}^4\, t\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{(90)^2\,\text{sen}^2\, t\cos^2 t} = 90 \mid \text{sen}\, t\cos t \mid .$$

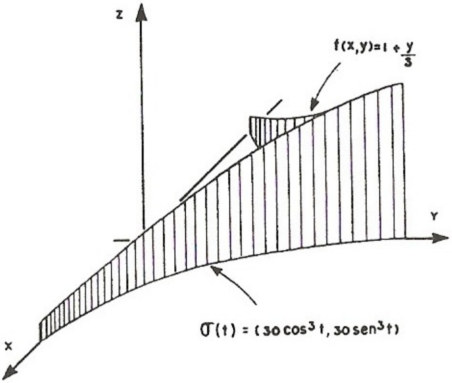


Figura 6.3

Como f é contínua, a fórmula (6.2) garante que a área da metade da cerca é

$$\int_C \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds = 90\int_0^{\pi} (1 + 10\,\text{sen}^3\, t) \mid \text{sen}\, t\cos t \mid dt =$$

$$= 90\left[\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\, t + 10\,\text{sen}^4\, t)\cos t dt - \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}\, t + 10\,\text{sen}^4\, t)\cos t dt\right] =$$

$$= 180\left[\frac{\text{sen}^{\,2} t}{2} + 2\,\text{sen}^{\,5} t\right]_0^{\pi/2} = 180\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 450.$$

A área total da cerca é $2 \times 450\ m^2 = 900\ m^2$ e, portanto, o pintor cobrará $900p$ reais.

§6.2 Integral de linha de campo vetorial

Sejam

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) \end{aligned}$$

um campo vetorial e C uma curva em $\mathbb{R}^3$, definida por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $t \in [a,b]$.

Para motivar a definição de integral de linha de F ao longo de C, suponhamos que F representa um campo de forças e calculemos o trabalho realizado pela força F ao deslocar uma partícula ao longo de C.

Quando C é um segmento de reta ligando o ponto A ao ponto B e F é uma força constante, sabemos que o trabalho realizado por F ao deslocar uma partícula ao longo de C é dado por

$$W = F \cdot AB = \text{(força na direção do deslocamento)} \times \text{(deslocamento)}.$$

Quando C não é um segmento de reta, podemos aproximá-la por uma linha poligonal com vértices em C do seguinte modo: dividimos o intervalo $I = [a,b]$ por meio de uma partição regular de ordem n, $a = t_0 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b$, obtendo assim uma linha poligonal de vértices $\sigma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $i = 0, \cdots, n-1$ (figura 6.4).

Como, para n grande, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é pequeno, o deslocamento da partícula de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é aproximado pelo vetor $\Delta s_i = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)$, e F pode ser considerada constante e igual a $F(\sigma(t_i))$ no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

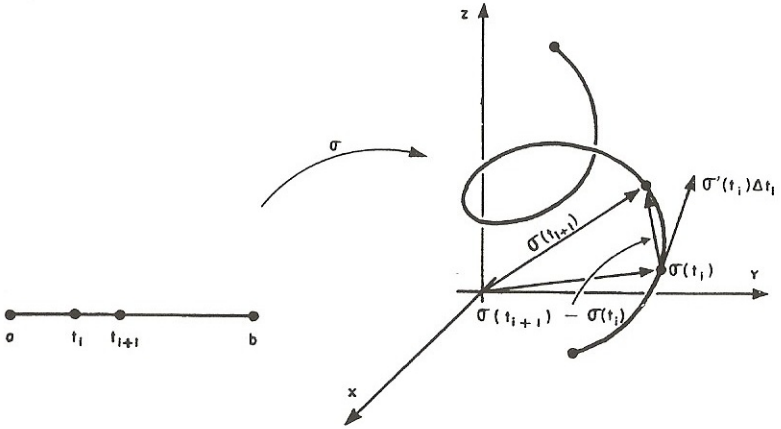


Figura 6.4

Supondo que $\sigma'(t)$ existe para todo $t \in [a,b]$, então, pela definição de derivada, temos que

$$\Delta s_i \approx \sigma'(t_i)\Delta(t_i).$$

Portanto, o trabalho realizado para deslocar uma partícula de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é aproximadamente

$$F(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx (F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i))\Delta t_i$$

Assim, o trabalho W realizado pela força F para deslocar uma partícula ao longo de C é

$$W = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i))\Delta t_i \right).$$

Se σ' é contínua em $[a,b]$ e $F(x,y,z)$ é contínuo* em C, o limite acima

---

*Um campo vetorial

$$\begin{aligned} F : D \subset \mathbb{R}^n \quad &\to \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \quad &\mapsto F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x)) \end{aligned}$$

é **contínuo em** D se as funções $F_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas em D, $i = 1, \cdots, n$.

existe e é igual a

$$W = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t))dt.$$

Definição 6.2: Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, onde σ é de classe C^1, e $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ um campo vetorial contínuo definido em C. Definimos a **integral de linha de F ao longo de C** por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t))dt \tag{6.3}$$

(no integrando acima $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ denota o produto escalar de $F(\sigma(t))$ por $\sigma'(t)$).

Se a curva C é fechada, isto é, se $\sigma(b) = \sigma(a)$, a integral de linha é denotada por $\oint_C F \cdot dr$.

Como no caso da integral de linha de uma função escalar, a fórmula (6.3) ainda é válida se $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ é contínua por partes em $[a, b]$.

Se usarmos as componentes de F e de σ, a equação (6.3) se escreve

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F_1(\sigma(t))x'(t)dt + F_2(\sigma(t))y'(t)dt + F_3(\sigma(t))z'(t)dt.$$

Por esta razão, é usual denotar-se a integral de linha por

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Quando C é uma curva no plano xy parametrizada por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, a integral de linha de $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ ao longo de C é dada por

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b F_1(\sigma(t))x'(t)dt + F_2(\sigma(t))y'(t)dt. \tag{6.4}$$

Exemplo 6.3: Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e C é a curva parametrizada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Como F é contínua em $I\!R^3$ e $\sigma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$ é contínua em $[0, 2\pi]$, usando (6.3) temos

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Exemplo 6.4: Calcule a integral de linha do campo vetorial $F(x, y) = (x^2 - 2xy, x^3 + y)$ de (0,0) a (1,1) ao longo das seguintes curvas:

a) O segmento de reta C_1 de equações paramétricas $x = t$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$.

b) A curva C_2 de equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Para a), temos $\sigma(t) = (t, t)$. Então $\sigma'(t) = (1, 1)$ e $F(\sigma(t)) = (-t^2, t^3 + t)$. Portanto, por (6.4),

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^1 (-t^2 + t^3 + t) dt = \left[\frac{-t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Para b), temos $\sigma(t) = (t^2, t^3)$. Então $\sigma'(t) = (2t, 3t^2)$ e $F(\sigma(t)) = (t^4 - 2t^5, t^6 + t^3)$. Logo, por (6.4),

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_0^1 (2t^5 - 4t^6 + 3t^8 + 3t^5) dt = \left[\frac{5t^6}{6} - \frac{4t^7}{7} + \frac{t^9}{3} \right]_0^1 = \frac{25}{42}.$$

Este exemplo mostra que a integral de linha de um campo vetorial de um ponto a outro depende, em geral, da curva que liga os dois pontos.

Vamos agora calcular o item b) mais uma vez, usando uma representação paramétrica diferente para a curva C_2. A curva C_2 pode ser descrita pela função

$$\beta(t) = (t, t^{3/2}) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como $\beta'(t) = \left(1, \frac{3}{2}t^{1/2}\right)$ e $F(\beta(t)) = (t^2 - 2t^{5/2}, t^3 + t^{3/2})$, obtemos, por (6.4),

$$\int_0^1 F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)dt = \int_0^1 \left(t^2 - 2t^{5/2} + \frac{3}{2}t^{7/2} + \frac{3}{2}t^2\right) dt =$$

$$= \left[\frac{5t^3}{6} - \frac{4t^{7/2}}{7} + \frac{t^{9/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{25}{42}.$$

Acabamos de observar no exemplo acima que o valor da integral $\int_{C_2} F \cdot dr$ é o mesmo para as duas parametrizações da curva C_2. Esta é uma propriedade importante das integrais de linha que provaremos a seguir.

Lembremos que (ver Cap.1, p.25) se $\sigma(t)$ $(a \leq t \leq b)$ e $\beta(t)$ $(c \leq t \leq d)$ são duas parametrizações equivalentes da curva C, então existe uma função $h : [c, d] \to [a, b]$, bijetora e de classe C^1, tal que $\beta(t) = \sigma(h(t))$.

Se h é crescente, dizemos que h preserva a orientação, isto é, uma partícula que percorre C com a parametrização $\beta(t)$ se move no mesmo sentido que a partícula que percorre C segundo a parametrização $\sigma(t)$. Se h é decrescente, dizemos que h inverte a orientação.

Teorema 6.1: *Sejam $\sigma(t)$ $(a \leq t \leq b)$ e $\beta(t)$ $(c \leq t \leq d)$ parametrizações C^1 por partes e equivalentes.*

Se h preserva a orientação, então

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = \int_{C_\sigma} F \cdot dr$$

Se h inverte a orientação, então

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = -\int_{C_\sigma} F \cdot dr.$$

(C_β e C_σ denotam a curva C parametrizada por $\beta(t)$ e $\sigma(t)$, respectivamente).

Demonstração: É suficiente provar o teorema para $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ de classe C^1. Suponhamos que as parametrizações $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ estão relacionadas pela equação $\beta(t) = \sigma(h(t))$, $t \in [c, d]$. Então,

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = \int_c^d F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)dt = \int_c^d F(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t))h'(t)dt.$$

Fazendo a substituição $u = h(t)$, $du = h'(t)dt$, obtemos

$$\int_{C_\beta} F \cdot dr = \int_{h(c)}^{h(d)} F(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u)du =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_a^b F(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u)du = \int_{C_\sigma} F \cdot dr, & \text{se h preserva a orientação.} \\ \displaystyle\int_b^a F(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u)du = -\int_{C_\sigma} F \cdot dr, & \text{se h inverte a orientação.} \end{cases}$$

Como caso particular deste teorema temos que

$$\int_{C^-} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr,$$

onde C^- é a curva C com orientação oposta, isto é, $h(t) = -t$.

No caso de função escalar temos que

$$\int_{C_\beta} f ds = \int_{C_\sigma} f ds,$$

se $\beta(t)$ e $\sigma(t)$ são parametrizações C^1 por partes e equivalentes da curva C.

Podemos ainda destacar as seguintes propriedades da integral de linha:

(i) **Linearidade.**

$$\int_C (aF + bG) \cdot dr = a\int_C F \cdot dr + b\int_C G \cdot dr,$$

onde a e b são constantes reais.

(ii) **Aditividade.** Se C admite uma decomposição num número finito de curvas

$C_1, \cdots, C_n$, isto é, $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, então

$$\int_C F \cdot dr = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F \cdot dr.$$

A prova destas propriedades segue imediatamente da definição de integral de linha, e a deixamos como exercício para o leitor.

Exemplo 6.5: Considere C a fronteira do quadrado no plano xy de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1), orientada no sentido anti-horário (figura 6.5). Calcule a integral de linha $\int_C x^2dx + xydy$.

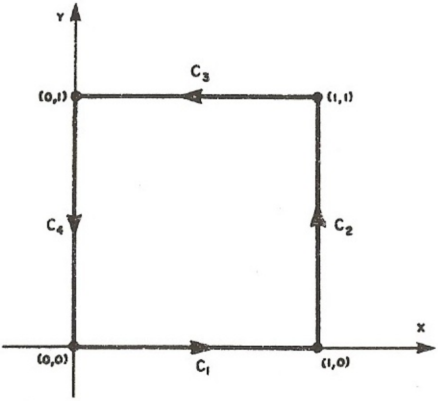


Figura 6.5

Solução: A curva C é decomposta em quatro segmentos de reta que podem ser parametrizados do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
C_1 &: \sigma_1(t) = (t,0), & 0 \leq t \leq 1.\\
C_2 &: \sigma_2(t) = (1,t), & 0 \leq t \leq 1.\\
C_3 &: \sigma_3(t) = (-t,1), & -1 \leq t \leq 0.\\
C_4 &: \sigma_4(t) = (0,-t), & -1 \leq t \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} x^2dx + xydy &= \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}.\\
\int_{C_2} x^2dx + xydy &= \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.\\
\int_{C_3} x^2dx + xydy &= \int_{-1}^0 -t^2dt = -\frac{1}{3}.\\
\int_{C_4} x^2dx + xydy &= \int_{-1}^0 0dt = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_C x^2dx + xydy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Em geral, a integral de linha de um campo vetorial F ao longo de uma curva C que liga os pontos A e B depende da curva C (veja o exemplo 6.4). No entanto, para alguns campos vetoriais, a integral depende apenas dos pontos A e B e não da curva que os liga. Neste caso, dizemos que a integral de linha independe do caminho que liga A a B.

Que campos vetoriais têm integrais de linha que independem do caminho? O teorema a seguir, que é uma extensão do teorema fundamental do cálculo, responde a esta pergunta.

Teorema 6.2: *Seja F um campo vetorial contínuo definido num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ para o qual existe uma função real f tal que $\nabla f = F$ em U. Se C é uma curva em U com pontos inicial e final A e B, respectivamente, parametrizada por uma função $\sigma(t)$, C^1 por partes, então*

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Demonstração: Se $a, b \in I\!R$ são tais que $\sigma(a) = A$ e $\sigma(b) = B$, então

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt.$$

Pondo $g(t) = f(\sigma(t))$, $a \leq t \leq b$, temos, pela regra da cadeia,

$$g'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = f(B) - f(A).$$

O campo vetorial F do teorema 6.2 é chamado **campo gradiente** ou **campo conservativo** e a função f uma **função potencial**. Uma condição necessária e suficiente para que um campo vetorial seja um campo gradiente será vista nos teoremas 6.4 e 7.4.

Construção de uma função potencial usando integrais indefinidas

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial gradiente de uma função potencial f num aberto $U \subset I\!R^3$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3. \tag{6.7}$$

Usando integrais indefinidas e integrando (6.5) em relação a x (mantendo y e z constantes), obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_1(x, y, z)dx + A(y, z), \tag{6.8}$$

onde $A(y, z)$ é uma "*constante de integração*" a ser determinada. Analogamente, se integrarmos (6.6) em relação a y e (6.7) em relação a z, obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_2(x, y, z)dy + B(x, z) \tag{6.9}$$

e

$$f(x, y, z) = \int F_3(x, y, z)dz + C(x, y), \tag{6.10}$$

onde $B(x, z)$ e $C(x, y)$ são funções a serem determinadas. Para encontrar f devemos determinar $A(y, z)$, $B(x, z)$ e $C(x, y)$ de modo que as equações (6.8), (6.9) e (6.10) tenham o mesmo lado direito.

Exemplo 6.6: Considere o campo gradiente $F(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \operatorname{sen} y)$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde C é qualquer curva C^1 por partes de $A = (\pi, 0)$ até $B = (0, \pi)$.

Solução: Pelo teorema 6.2, $\int_C F \cdot dr = f(0, \pi) - f(\pi, 0)$, onde f é uma função potencial de F em $I\!R^2$, que será determinada usando integrais indefinidas. Aqui, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-y} - 2x \tag{6.11}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xe^{-y} - \operatorname{sen} y. \tag{6.12}$$

Integrando (6.11) em relação a x e (6.12) em relação a y, obtemos

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + A(y) \tag{6.13}$$

e

$$f(x, y) = xe^{-y} + \cos y + B(x). \tag{6.14}$$

Por inspeção, resulta que $A(y) = \cos y$ e $B(x) = -x^2$ verificam as equações (6.13) e (6.14). Portanto, uma função potencial é $f(x, y) = xe^{-y} + \cos y - x^2$. Logo,

$$\int_C F \cdot dr = -1 - (\pi + 1 - \pi^2) = \pi^2 - \pi - 2.$$

§6.3 Exercícios

1. Calcule $\int_C f ds$, onde

   a) $f(x, y) = x + y$ e C é a fronteira do triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1).

   b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

   c) $f(x, y) = y^2$ e C tem equações paramétricas $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   d) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ e C é definida por $\sigma(t) = (1, 2, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

   e) $f(x, y, z) = yz$ e C é o segmento de reta de extremidades (0,0,0) e (1,3,2).

   f) $f(x, y, z) = x + y$ e C é a curva obtida como interseção do semiplano $x = y$, $y \geq 0$, com o parabolóide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$.

2. Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, com o plano $x + z = 2$. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame.

3. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$,

$z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.

4. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde

   a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ e C é a parábola $y = x^2$ de $(-2,4)$ a (1,1).

   b) $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ e C é a circunferência de centro na origem e raio a, percorrida no sentido anti-horário.

   c) $F(x,y) = (y + 3x, 2y - x)$ e C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário.

   d) $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e C é a curva de equação $y = 1 - |1 - x|$ de (0,0) a (2,0).

   e) $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ e C é o segmento de reta de (0,0,0) a (1,2,4).

   f) $F(x,y,z) = (yz, xz, x(y+1))$ e C é a fronteira do triângulo de vértices (0,0,0), (1,1,1) e $(-1,1,-1)$, percorrida nesta ordem.

   g) $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e C é a curva de interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ com o plano $y = 1$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.

   h) $F(x,y,z) = (xy, x^2 + z, y^2 - x)$ e C é a curva obtida como interseção do cone $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, com o cilindro $x = y^2$ de (0,0,0) a $(1,1,\sqrt{2})$.

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ao mover uma partícula ao longo da fronteira do quadrado limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = a$ e $y = a$ $(a > 0)$ no sentido anti- horário.

6. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ ao longo da curva obtida como interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = ax$, onde $z \geq 0$ e $a > 0$. A curva é percorrida no sentido anti-horário quando vista do plano xy.

7. Determine uma função potencial para cada campo gradiente F dado.

   a) $F(x, y) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y)$.

   b) $F(x, y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2)$.

   c) $F(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x, 2x - 2ye^x)$.

   d) $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

   e) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$.

   f) $F(x, y, z) = (y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z, xy \cos z)$.

§6.4 Teorema de Green

O teorema de Green relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada C no plano xy com uma integral dupla sobre a região limitada por C. Este teorema será generalizado para curvas e superfícies no $\mathbb{R}^3$, no capítulo 7.

Antes de enunciar e provar o teorema de Green, faz-se necessário introduzir as seguintes definições.

Definição 6.3: Dizemos que uma região fechada e limitada D do plano xy é **simples** se D pode ser descrita como uma região de tipo I e de tipo II, simultaneamente.

Definição 6.4: Dizemos que a fronteira ∂D de uma região limitada D do plano xy está **orientada positivamente**, se a região D fica à esquerda, ao percorrermos a fronteira ∂D (figura 6.6).

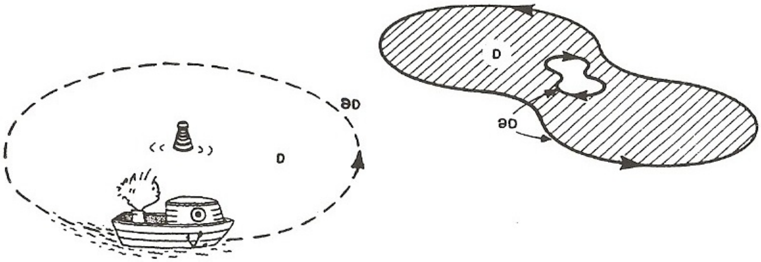


Figura 6.6

Teorema 6.3 (Teorema de Green): *Seja D uma região fechada e limitada do plano xy, cuja fronteira ∂D está orientada positivamente e é parametrizada por uma função C^1 por partes, de modo que ∂D seja percorrida apenas uma vez. Se $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ é um campo vetorial de classe C^1[*] num subconjunto aberto que contém D, então*

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \int\!\!\int_{D} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Demonstração: Vamos considerar D uma região simples, ou seja, vamos supor que D pode ser descrita simultaneamente por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \qquad u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\} \tag{6.15}$$

---

[*] Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um **campo vetorial de classe** C^1 se todas as derivadas parciais $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ das funções coordenadas de F são contínuas em U.

e

$$D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 | v_1(y) \leq x \leq v_2(y), \quad c \leq y \leq d\}, \tag{6.16}$$

como mostra a figura 6.7.

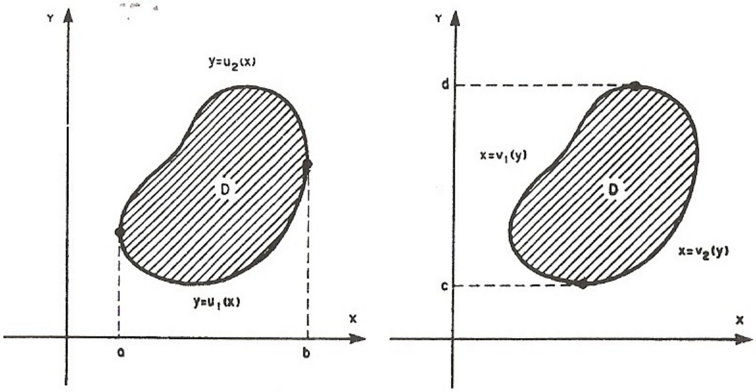


Figura 6.7

Como

$$\int\!\!\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int\!\!\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dxdy + \int\!\!\int_D -\frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy,$$

podemos calcular cada integral do segundo membro desta equação separadamente.

Usando (6.15), obtemos

$$\begin{aligned} \int\!\!\int_D -\frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \int_{y=u_1(x)}^{y=u_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dydx = \\ &= \int_a^b [F_1(x, u_1(x)) - F_1(x, u_2(x))] dx = \\ &= \int_a^b F_1(x, u_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x, u_2(x)) dx = \\ &= \oint_{\partial D} F_1 dx. \end{aligned}$$

Analogamente, usando (6.16), mostramos que

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial F_2}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} F_2 dy.$$

Se D não é simples, a decompomos como união finita de regiões simples, digamos $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, onde cada região simples D_k tem fronteira ∂D_k C^1 por partes $(k = 1, \cdots, n)$, e aplicamos o teorema de Green a cada região D_k, obtendo

$$\iint\limits_{D_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D_k} F_1 dx + F_2 dy.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy + \cdots + \iint\limits_{D_n} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= \oint_{\partial D_1} F_1 dx + F_2 dy + \cdots + \oint_{\partial D_n} F_1 dx + F_2 dy. \end{aligned}$$

A fronteira de D é formada por partes das curvas ∂D_k. As partes de ∂D_k que não constituem a fronteira de D agem como fronteira comum a duas reg simples. Este fato está ilustrado na figura 6.8.

Uma parte δ de ∂D_k que é fronteira comum a duas regiões simples será percorrida duas vezes em sentidos opostos. Mas, pelo teorema 6.1,

$$\int\limits_{\delta} F_1 dx + F_2 dy + \int\limits_{\delta} F_1 dx + F_2 dy = 0.$$

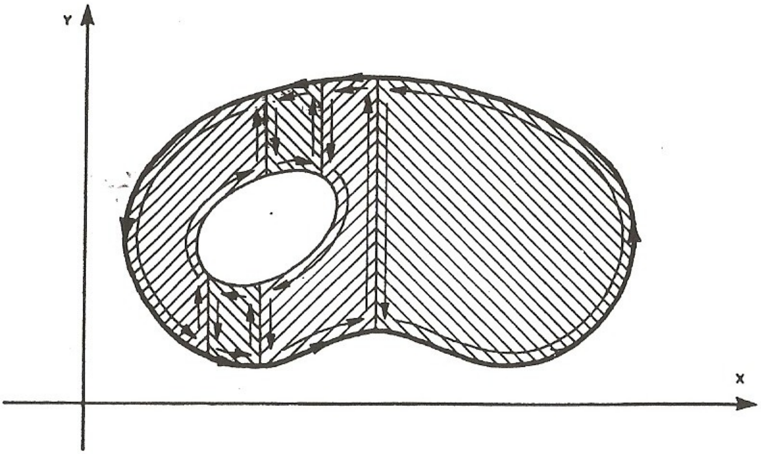


Figura 6.8

Portanto, enquanto as partes das curvas ∂D_k que formam a fronteira de D contribuem para $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$, as outras partes se cancelam, fornecendo assim

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy.$$

Isto prova o teorema.

Exemplo 6.7: Calcule $\oint_C \frac{x^2 - y^2}{2} dx + \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) dy$, onde C é a fronteira da região D definida por $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: A curva C está indicada na figura 6.9. Sendo
$F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}, \frac{x^2}{2} + y^4 \right)$ um campo vetorial de classe C^1 em $I\!R^2$, podemos aplicar o teorema de Green e obter

$$\oint_C \frac{x^2 - y^2}{2} dx + \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) dy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{2} + y^4 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) \right] dx dy = \iint_D (x + y) dx dy.$$

Usando mudança polar, vem

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+y)dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^2(\cos\theta + \text{ sen }\theta)drd\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2}(\cos\theta + \text{ sen }\theta)\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 d\theta = \\ &= \frac{7}{3}[\text{ sen }\theta - \cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

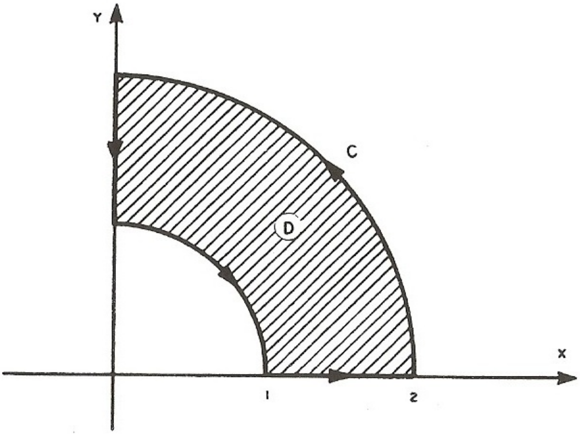


Figura 6.9

Exemplo 6.8: Calcule $\int_C e^x \text{ sen } ydx + (e^x\cos y + x)dy$, onde C é o arco da circunferência $x^2+y^2=1$, no primeiro quadrante, orientado no sentido anti-horário.

Solução: O campo vetorial $F(x,y) = (e^x \text{ sen } y, e^x\cos y + x)$ é de classe C^1 em $I\!R^2$. Podemos aplicar o teorema de Green à região limitada por C, γ_1 e γ_2, esboçada na figura 6.10.

Como $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = e^x\cos y + 1$ e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = e^x\cos y$, segue do teorema de Green que $\dfrac{\pi}{4} = \text{área } D = \iint\limits_D 1dxdy$ e

$$\iint_D 1 dx dy = \int_C F_1 dx + F_2 dy + \int_{\gamma_1} F_1 dx + F_2 dy + \int_{\gamma_2} F_1 dx + F_2 dy.$$

As curvas γ_1 e γ_2 são parametrizadas por $\sigma_1(t) = (0, -t)$, $-1 \le t \le 0$, e $\sigma_2(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 1$, respectivamente. Portanto,

$$\int_{\gamma_1} F_1 dx + F_2 dy = \int_{-1}^{0} -\cos t dt = [-\operatorname{sen} t]_{-1}^{0} = -\operatorname{sen} 1$$

e

$$\int_{\gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Assim,

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} 1.$$

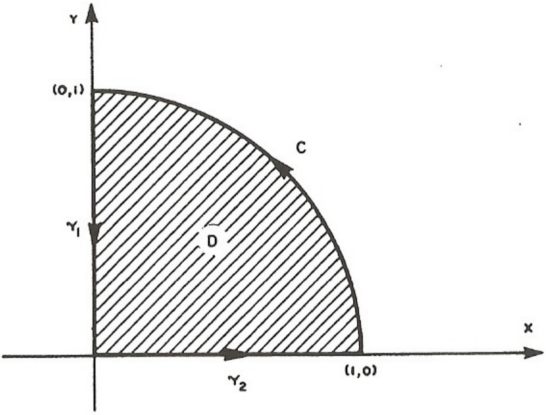


Figura 6.10

Exemplo 6.9: Calcule a integral de linha do campo vetorial $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + 2x \right)$ ao longo da curva C de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Como o campo vetorial F não está definido em $(x, y) = (0, 0)$, o teorema de Green não se aplica à região limitada por C, e a integral de linha de F ao longo de C também não é simples de ser calculada diretamente. No entanto, podemos aplicar o teorema de Green à região D limitada pela curva C e a circunferência γ de raio 1 e centro na origem, parametrizada por $\sigma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (figura 6.11).

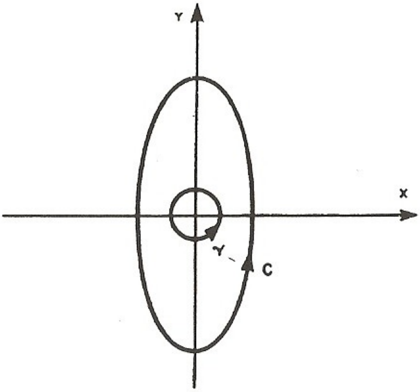


Figura 6.11

Como $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2$ e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, o teorema de Green nos dá

$$\int_{C \cup \gamma^-} F_1 dx + F_2 dy = \int\int_D 2 dx dy = 2 \times \text{área de } D = 10\pi.$$

Logo,

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = 10\pi + \oint_\gamma F_1 dx + F_2 dy.$$

Esta última integral é calculada diretamente do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F_1dx+F_2dy &= \int_0^{2\pi}[(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)+(\cos t+2\cos t)\cos t]dt=\\ &= \int_0^{2\pi}(1+2\cos^2 t)dt=\left[2t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi}=4\pi.\end{aligned}$$

Assim,

$$\oint_C F_1dx+F_2dy=10\pi+4\pi=14\pi.$$

Interpretação vetorial do teorema de Green

Suponhamos que D é uma região fechada e limitada do plano xy cuja fronteira ∂D é uma curva orientada no sentido anti-horário. Se ∂D tem uma parametrização
$\sigma(t)=(x(t),y(t))$ $(a\le t\le b)$ de classe C^1, cujo vetor tangente é não nulo em cada ponto de ∂D, então denotamos os vetores tangente e normal unitário por

$$T(t)=\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}=\left(\frac{x'(t)}{\|\sigma'(t)\|},\frac{y'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\right)$$

e

$$n(t)=\left(\frac{y'(t)}{\|\sigma'(t)\|},-\frac{x'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\right),$$

respectivamente.

Se $F=(F_1,F_2)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido num subconjunto aberto que contém D, então a integral de linha de F ao longo de ∂D pode ser escrita em termos do vetor $T(t)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} F_1dx+F_2dy &= \int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\\ &= \int_a^b\left(F(\sigma(t))\cdot\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\right)\|\sigma'(t)\|dt=\\ &= \int_a^b(F(\sigma(t))\cdot T(t))\|\sigma'(t)\|dt=\oint_{\partial D}(F\cdot T)ds.\end{aligned}$$

Neste caso, o teorema de Green assume a forma

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D} (F \cdot T) ds.$$

Este resultado é um caso particular do teorema de Stokes, que veremos mais tarde.

Agora, usando o vetor normal unitário $n(t)$, a integral de linha do campo vetorial $G = (-F_2, F_1)$ ao longo de ∂D é dada por

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy &= \int_a^b G(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \\ &= \int_a^b (F(\sigma(t)) \cdot n(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \\ &= \oint_{\partial D} (F \cdot n) ds. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Green ao campo G, obtemos

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D} (F \cdot n) ds.$$

Este resultado é a versão em duas dimensões do teorema de Gauss, que veremos posteriormente.

§6.5 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais, ao longo das curvas C, orientadas positivamente.

a) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$; C é a fronteira do quadrado $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) $\oint_C (3x^2 + y) dx + 4y^2 dy$; C é a fronteira do triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,2).

c) $\oint_C (e^x - 3y)dx + (e^y - 6x)dy$; C é a elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$.

d) $\oint_C x^{-1}e^y dx + (e^y ln x + 2x)dy$; C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

e) $\oint_C (2xy - x^2)dx + (x - y^2)dy$; C é a fronteira da região limitada por $y = x^2$ e $y^2 = x$.

f) $\oint_C (x + y)dx + (y - x)dy$; C é a circunferência $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

g) $\oint_C (2x - y^3)dx - xydy$; C é a fronteira da região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

h) $\oint_C (2x - y)dx + (x + 3y)dy$; C é a fronteira do pentágono de vértices (0,0), (0,2), (1,3), (2,2) e (2,0).

2. Seja C uma curva fechada, orientada positivamente, limitando uma região do plano xy, de área A. Verifique que, se a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e b_3 são constantes reais, então

$$\oint_C (a_1x + a_2y + a_3)dx + (b_1x + b_2y + b_3)dy = (b_1 - a_2)A.$$

3. Determine $\oint_C (x^2 + y + 2xy^3)dx + (5x + 3x^2y^2 + y)dy$, onde C é a união das curvas C_1, C_2 e C_3 dadas por $C_1: x^2+y^2 = 1,\ \ y \geq 0$; $C_2: x+y+1 = 0,\ \ -1 \leq x \leq 0$; $C_3: x - y - 1 = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1$. Especifique a orientação escolhida.

4. a) Mostre que a área de uma região fechada e limitada D do plano xy pode ser obtida através da seguinte integral de linha:

$$\text{área } (D) = \oint_{\partial D} xdy.$$

b) Use a) para calcular a área da região limitada pelo eixo y, pelas retas $y = 1$, $y = 3$, e pela curva $x = y^2$.

5. Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo vetorial de classe C^1 no $\mathbb{R}^2$, exceto em (0,0), tal que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) + 4$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Sabendo que $\displaystyle\oint_\gamma F_1 dx + F_2 dy = 6\pi$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário, calcule $\displaystyle\oint_C F_1 dx + F_2 dy$, onde C é a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, orientada no sentido anti-horário.

6. Seja $F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} + 3x\right)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Calcule a integral de linha do campo F ao longo das curvas C_1 e C_2, orientadas no sentido anti-horário, onde:

a) C_1 é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

b) C_2 é a fronteira do retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\pi \leq x \leq \pi\ ,\ -3 \leq y \leq 3\}$.

§6.6 Campos vetoriais conservativos no plano

Vimos no teorema 6.2 que, se $F = \nabla f$, a integral de linha de F ao longo de uma curva C depende apenas dos pontos inicial e final. Caracterizaremos agora os campos vetoriais do plano que são campos gradientes.

Teorema 6.4: *Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo vetorial de classe C^1 definido num domínio simplesmente conexo* $U \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes condições são*

---

*Um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito um **domínio** se dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por uma poligonal totalmente contida em U.

Um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é dito **simplesmente conexo** se, para toda curva fechada C em U, a região limitada por C está totalmente contida em U. Intuitivamente, um aberto U é simplesmente conexo se não tem "buracos".

equivalentes:

(i) $\oint_C F \cdot dr = 0$, *qualquer que seja a curva fechada* C, C^1 *por partes, contida em* U.

(ii) A integral de linha de F *do ponto* A *até o ponto* B *independe da curva* C^1 *por partes, contida em* U, *que liga* A *a* B.

(iii) F *é um campo gradiente de alguma função potencial* f *em* U.

(iv) $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ *em* U.

Demonstração: Vamos provar que

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (i),$$

o que estabelecerá o teorema.

Primeiramente, mostraremos que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Sejam C_1 e C_2 duas curvas C^1 por partes contidas em U, ligando o ponto A ao ponto B (figura 6.12).

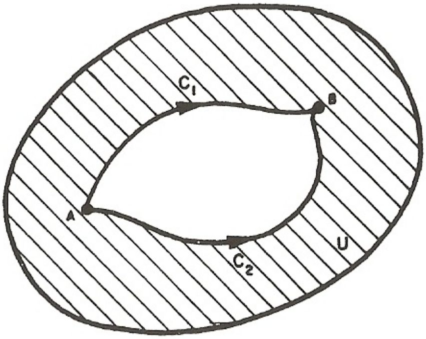


Figura 6.12

Como a curva $C = C_1 \cup C_2^-$ é fechada e C^1 por partes, então, por (i), segue que

$$0 = \oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr,$$

provando (ii).

Provaremos agora que $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Fixemos (x_0, y_0) em U e, para cada $(X, Y) \in U$, definamos

$$f(X,Y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} F_1 dx + F_2 dy.$$

Esta função está bem definida pois a integral independe do caminho que liga (x_0, y_0) a (X, Y). Para Δx suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned} f(X+\Delta x, Y) - f(X,Y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} F_1 dx + F_2 dy = \\ &= \int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy. \end{aligned}$$

Como esta última integral independe do caminho entre (X, Y) e $(X + \Delta x, Y)$, podemos tomá-lo como sendo o segmento de reta que liga estes pontos (figura 6.13).

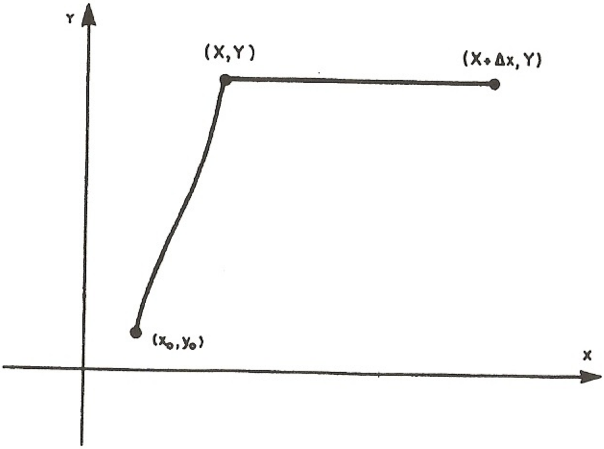


Figura 6.13

Neste segmento y é constante e, portanto, $dy = 0$. Assim,

$$\int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy = \int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx.$$

Usando o teorema do valor médio para integrais, obtemos

$$\int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx = \Delta x F_1(X + t\Delta x, Y),$$

para algum $0 \leq t \leq 1$.

Logo,

$$\frac{f(X+\Delta x, Y) - f(X,Y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy = F_1(X + t\Delta x, Y).$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) = F_1(X,Y).$$

Analogamente, prova-se que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = F_2$.

Mostremos que $(iii) \Longrightarrow (iv)$. Se $F = \nabla f$ em U, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2.$$

Como F é de classe C^1, então f é de classe C^2 e, considerando suas derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

obtemos a igualdade

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Finalmente, provaremos que $(iv) \Longrightarrow (i)$. Se C é uma curva fechada em U, então a região D limitada por C está contida em U, visto que U é simplesmente conexo. Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

A demonstração do teorema está concluída.

Observe que a hipótese de U ser simplesmente conexo só é necessária para provar que $(iv) \Longrightarrow (i)$.

A demonstração da implicação $(ii) \Longrightarrow (iii)$ deste teorema fornece outro método para se calcular uma função potencial f de um campo gradiente F.

Construção de uma função potencial usando integrais definidas

Como vimos anteriormente, a função

$$f(X,Y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} F_1 dx + F_2 dy \tag{6.17}$$

(onde (x_0, y_0) é um ponto fixado de U) define uma função potencial. A integral acima pode ser calculada do seguinte modo: primeiramente, integra-se de (x_0, y_0) a (X, y_0) ao longo do segmento horizontal C_1, e depois de (X, y_0) a (X, Y) ao longo do segmento vertical C_2 (figura 6.14).

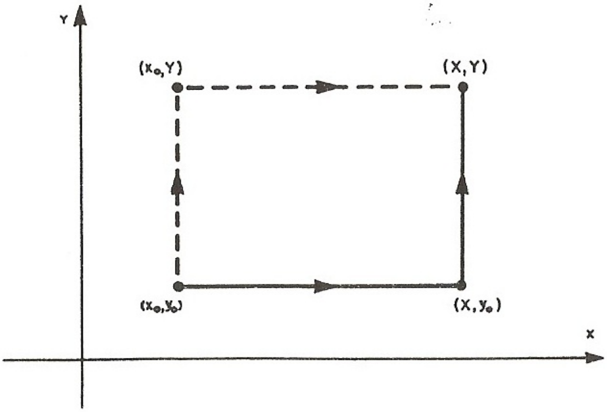


Figura 6.14

Parametrizando C_1 por $\sigma_1(t) = (t, y_0)$, $x_0 \leq t \leq X$, e C_2 por $\sigma_2(t) = (X, t)$, $y_0 \leq t \leq Y$, obtemos

$$f(X,Y) = \int_{x_0}^{X} F_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{Y} F_2(X,t)dt. \tag{6.18}$$

Pode-se também calcular a integral da equação (6.17) ao longo do caminho pontilhado na figura 6.14. Neste caso, obtém-se

$$f(X,Y) = \int_{y_0}^{Y} F_2(x_0, t)dt + \int_{x_0}^{X} F_1(t, Y)dt. \tag{6.19}$$

Exemplo 6.10: Considere a curva C parametrizada por $\sigma(t) = \left(e^{t-1}, \text{sen}\,\frac{\pi}{t}\right)$, $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y) = (2x\cos y, -x^2 \,\text{sen}\, y)$.

Solução: Como F é de classe C^1 em $I\!R^2$ e

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^2 \,\text{sen}\, y) = -2x \,\text{sen}\, y = \frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y),$$

o teorema 6.4 garante que a integral $\int_C F \cdot dr$ independe do caminho que liga $\sigma(1) = (1,0)$ a $\sigma(2) = (e,1)$.

Usando o caminho poligonal ligando os pontos (1,0), (e,0) e (e,1), conforme a figura 6.15, temos

$$\begin{aligned}\int_{(1,0)}^{(e,1)} F \cdot dr &= \int_{(1,0)}^{(e,0)} 2x\cos y dx - x^2 \,\text{sen}\, y dy + \int_{(e,0)}^{(e,1)} 2x\cos y dx - x^2 \,\text{sen}\, y dy = \\ &= \int_1^e 2t dt + \int_0^1 -e^2 \,\text{sen}\, t dt = e^2 - 1 + e^2(\cos 1 - 1) = e^2 \cos 1 - 1\end{aligned}$$

Alternativamente, pelo teorema 6.4, também temos que F é um campo gradiente. Portanto, pelo teorema 6.2,

$$\int_{(1,0)}^{(e,1)} F \cdot dr = f(e,1) - f(1,0),$$

onde f é uma função potencial.

Como

$$f(X,Y) = \int_0^X 2t dt + \int_0^Y -X^2 \operatorname{sen} t dt = X^2 + \left[X^2 \cos t\right]_{t=0}^{t=Y} = X^2 \cos Y$$

é uma função potencial. então

$$\int_{(1.0)}^{(e.1)} F \cdot dr = e^2 \cos 1 - 1.$$

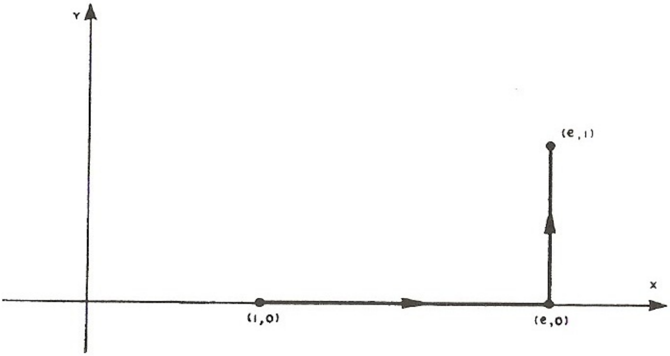


Figura 6.15

Exemplo 6.11: Considere o campo vetorial $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

a) Calcule $\int_{(1,0)}^{(2.1)} F \cdot dr$ ao longo da parábola $y = (x-1)^2$.

b) Calcule $\oint_C F \cdot dr$, onde C é uma curva fechada de classe C^1 que envolve a origem, orientada no sentido anti-horário.

Solução: A integral $\int_C F \cdot dr$ independe do caminho em qualquer domínio simplesmente conexo que não contenha a origem, pois $F(x,y)$ é de classe C^1 para $(x,y) \neq (0,0)$, e

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Podemos calcular $\int_{(1,0)}^{(2,1)} F \cdot dr$ ao longo da poligonal que liga os pontos (1,0), (2,0) e (2,1), conforme a figura 6.16.

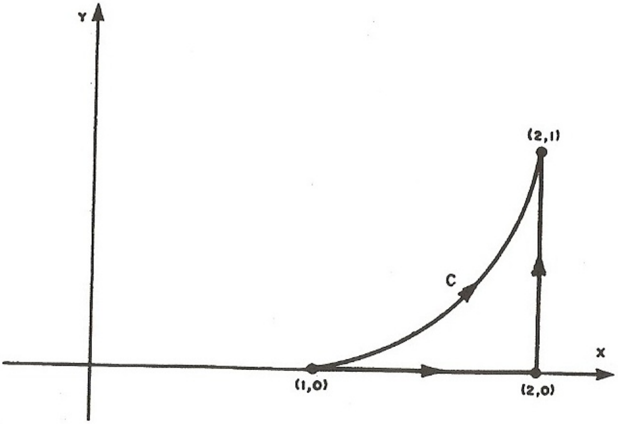


Figura 6.16

Assim,

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} F \cdot dr = \int_1^2 0 dt + \int_0^1 \frac{2}{4+t^2} dt = \left[\text{arctg}\ \left(\frac{t}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \text{arctg}\ \left(\frac{1}{2}\right).$$

b) Como todo domínio simplesmente conexo que contém C também contém a origem, o teorema 6.4 não pode ser aplicado. No entanto, podemos aplicar o teorema de Green à região limitada por C e pela circunferência γ de equação $x^2 + y^2 = a^2$, orientada no sentido anti-horário (figura 6.17), obtendo

$$\int_{C \cup \gamma^-} F \cdot dr = \int\int_{D.} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dr = \oint_\gamma F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \text{ sen } \theta}{a^2}(-a \text{ sen } \theta) + \frac{a \cos\theta}{a^2}(a \cos\theta) \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,\end{aligned}$$

onde γ está parametrizada por $\sigma(\theta) = (a\cos\theta, a \text{ sen } \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

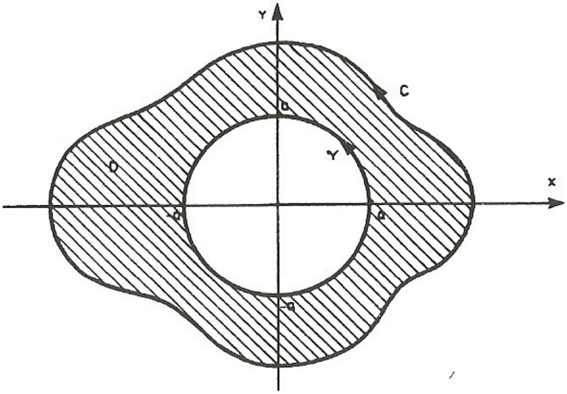


Figura 6.17

§6.7 Exercícios

1. Considere a integral de linha $\int_C (y^2 - xy)dx + k(x^2 - 4xy)dy$.

a) Determine a constante k para que esta integral seja independente do caminho.

b) Calcule o valor da integral de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ para o valor de k encontrado em a).

2. Verifique que as seguintes integrais independem do caminho e calcule seus valores.

a) $\displaystyle\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$.

b) $\displaystyle\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}dx - \frac{x^3}{y^2}dy.$

c) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(x_0,y_0)} 2xydx + (x^2 - y^2)dy.$

d) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} \text{sen } ydx + x\cos ydy.$

3. a) Caso exista, encontre uma função potencial para $V(x,y) =$ $= (2xy^3 - y^2\cos x, 1 - 2y \text{ sen } x + 3x^2y^2)$.

b) Calcule $\displaystyle\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y \text{ sen } x + 3x^2y^2)dy$, onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$, de $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

4. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{yx^2dx - x^3dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde C é a curva dada pela equação $\dfrac{x^2}{4} + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 =$ 1, percorrida no sentido anti-horário.

5. Encontre todos os possíveis valores de $\displaystyle\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

6. Mostre que as integrais $\displaystyle\oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ são nulas, quaisquer que sejam os contornos fechados C contidos no domínio das funções F_1 e F_2, onde:

a) $F_1(x,y) = \text{ sen } x + 4xy$ e $F_2(x,y) = 2x^2 - \cos y$.

b) $F_1(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ e $F_2(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$, e C **não envolve** a origem.

7. Sejam F_1 e F_2 funções com derivadas parciais contínuas no plano xy tais que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos (4,0), (0,0) e $(-4,0)$. Indique por C_1, C_2, C_3 e C_4 as circunferências de equações:

$$(x-2)^2+y^2=9\ ,\ (x+2)^2+y^2=9\ ,\ x^2+y^2=25\ \text{ e }\ x^2+y^2=1,$$

respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Sabendo que $\oint_{C_1} F_1dx+F_2dy=11$, $\oint_{C_2} F_1dx+F_2dy=9$ e $\oint_{C_3} F_1dx+F_2dy=13$, calcule $\oint_{C_4} F_1dx+F_2dy$.

8. Sejam $F_1(x,y)$ e $F_2(x,y)$ funções reais de classe C^1 em $U=\mathbb{R}^2-\{A,B\}$ (A e B como na figura 6.18), tais que $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}=\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ em U. Sendo C_1,C_2,C_3 as curvas dadas na figura 6.18, calcule $\oint_{C_3} F_1dx+F_2dy$, supondo que $\oint_{C_1} F_1dx+F_2dy=12$ e $\oint_{C_2} F_1dx+F_2dy=15$.

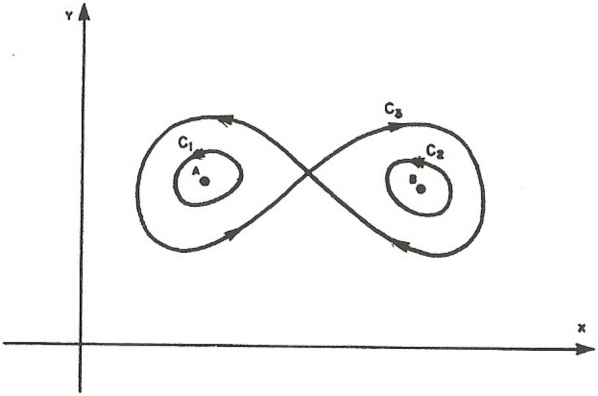


Figura 6.18

9. Seja D a região do plano xy limitada pelas circunferências C_1 e C_2 de equações $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=25$,respectivamente.Se $F_1(x,y)$ e $F_2(x,y)$ são de classe C^1 em D e $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em D, quais os possíveis valores da integral $\oint_C F_1dx+F_2dy$, onde C é qualquer curva fechada contida em D, C^1 por partes, sabendo-se que $\oint_{C_1} F_1dx+F_2dy=\oint_{C_2} F_1dx+F_2dy=2\pi$, quando C_1 e C_2 estão orientadas no sentido anti-horário. Justifique sua resposta.

10. Calcule $\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, onde C é a curva definida por $y^2 = 2(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido decrescente de y.

CAPÍTULO 7

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

No capítulo anterior estudamos integrais de funções escalares e vetoriais ao longo de curvas. Neste capítulo veremos integrais destas funções sobre superfícies.

§7.1 Representação paramétrica de uma superfície

Antes de definirmos as integrais de superfície propriamente ditas, devemos abordar as várias maneiras de se descrever uma superfície.

Já vimos anteriormente duas maneiras de se descrever uma superfície em $\mathbb{R}^3$ por fórmulas matemáticas. Uma delas é a **representação implícita** na qual descrevemos uma superfície como o conjunto dos pontos (x, y, z) satisfazendo a uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Algumas vezes podemos resolver esta equação para uma das variáveis em termos das outras duas, por exemplo, z em termos de x e y. Quando isto é possível obtemos uma **representação explícita** da superfície dada por uma ou mais equações da forma $z = f(x, y)$. Por exemplo, a esfera de raio 1 centrada na origem tem representação implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Quando esta equação é resolvida para z em termos de x e y, obtemos duas soluções $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. A primeira dá uma representação explícita do hemisfério superior da esfera e a segunda, uma representação explícita do hemisfério inferior.

O terceiro modo de se descrever uma superfície, útil no estudo das integrais de superfície, é a **representação paramétrica**, onde as coordenadas x, y e z dos pontos da superfície são expressas em termos de dois parâmetros.

Definição 7.1: Consideremos uma função $\varphi : D \subset I\!\!R^2 \to I\!\!R^3$ definida num subconjunto $D \subset I\!\!R^2$. A imagem de D por φ, $\varphi(D)$, é dita uma superfície parametrizada, e sua representação paramétrica é

$$\varphi(u,v) = (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad \text{e} \quad (u,v) \in D.$$

A função φ é diferenciável (resp. de classe C^1) se $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ são funções diferenciáveis (resp. de classe C^1) (figura 7.1).

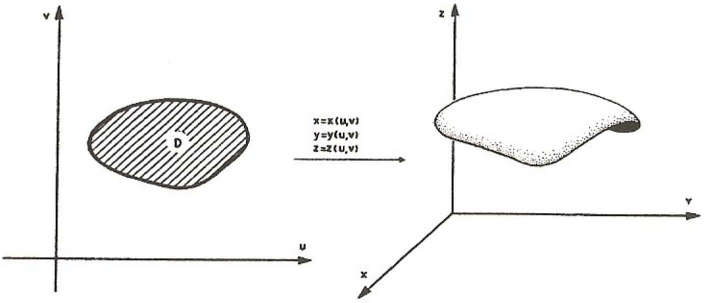


Figura 7.1

Suponhamos que uma superfície S com representação paramétrica

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad , \quad (u,v) \in D,$$

seja diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$. Fixando $u = u_0$, obtemos uma função

$$\begin{array}{rl} I \subset I\!\!R & \longrightarrow I\!\!R^3 \\ v & \longmapsto \varphi(u_0, v) \end{array}$$

que define uma curva (chamada curva v) na superfície (figura 7.2). Se o vetor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \, , \, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \, , \, \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \right)$$

é não nulo, então $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é um vetor tangente a esta curva no ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

Analogamente, fixado $v = v_0$, podemos considerar a curva definida pela função

$u \to \varphi(u, v_0)$ (chamada curva u) na superfície. Se o vetor

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right)$$

é não nulo, então ele é tangente a esta curva em $\varphi(u_0, v_0)$.

Quando $N(u_0, v_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é não nulo, temos que $N(u_0, v_0)$ é normal ao plano gerado pelos vetores $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$.

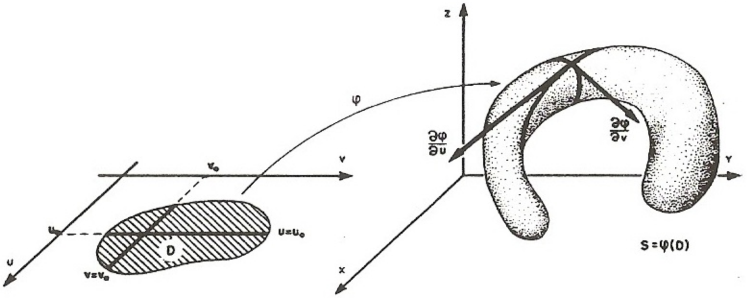


Figura 7.2

Definição 7.2: Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Suponhamos que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sejam contínuas em $(u_0, v_0) \in D$. Se $N(u_0, v_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é não nulo, dizemos que S é **regular** em $\varphi(u_0, v_0) \in S$. Neste caso, definimos* o **plano tangente** a S em $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

---

*Se S é regular em $\varphi(u_0, v_0)$, usando o teorema da função implícita (Apêndice) é possível mostrar que S é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis numa vizinhança do ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

como sendo o plano gerado pelos vetores $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$, cuja equação é dada por

$$\mathcal{N}(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Uma superfície $S = \varphi(D)$ é regular se é regular em todos os pontos. Intuitivamente, uma superfície regular não tem "*bicos*".

Exemplo 7.1: Superfícies com representação explícita $z = f(x, y)$

Uma superfície S com representação explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, pode ser parametrizada de modo natural usando-se x e y como parâmetros, ou seja, tomando-se como representação paramétrica de S

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad , \quad (x, y) \in D.$$

Se $f(x, y)$ é de classe C^1, então S é regular pois

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, , \, -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, , \, 1\right)$$

é não nulo para todo $(x, y) \in D$.

O plano tangente a S em $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dado por

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \, , \, -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \, , \, 1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Exemplo 7.2: Superfícies de revolução

Considere a superfície S obtida girando-se a curva C, no plano xz, em torno do eixo z. Se C tem equações paramétricas

$$x = x(t) \quad , \quad z = z(t) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad \text{e} \quad x(t) \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \in [a, b],$$

a superfície de revolução S assim gerada tem uma representação paramétrica dada por

$$\varphi(\theta,t)=(x(t)\cos\theta\ ,\ x(t)\,\mathrm{sen}\,\theta\ ,\ \mathrm{z(t)})\quad ,\quad (\theta,\mathrm{t})\in[0,2\pi]\times[\mathrm{a,b}].$$

Os parâmetros t e θ podem ser interpretados do seguinte modo: se $P=(x,y,z)\in S$, então P pertence a uma circunferência de centro no eixo z e raio igual a $x(t)$ para algum t, $a\leq t\leq b$, cuja distância ao plano xy é $z(t)$. O parâmetro θ representa o ângulo das coordenadas polares da projeção de P no plano xy, conforme ilustrado na figura 7.3.

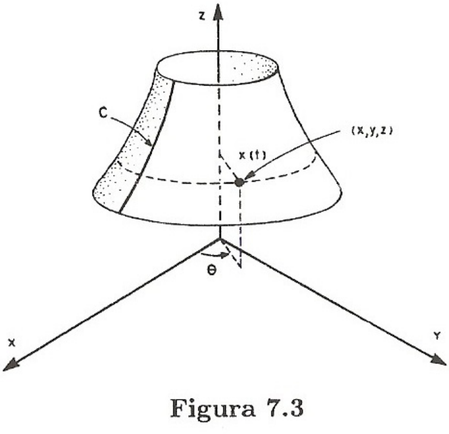


Figura 7.3

Exemplo 7.3: Considere a superfície S do cone $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (figura 7.4). Esta superfície pode ser representada parametricamente por

$$\varphi(x,y)=\left(x\ ,\ y\ ,\ \sqrt{x^2+y^2}\right)\quad ,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

como no exemplo 7.1.

Com esta representação paramétrica, S não é regular em (0,0,0) pois $f(x,y)$ não possui derivadas parciais em $(x,y)=(0,0)$.

A superfície S também pode ser parametrizada como no exemplo 7.2, visto que S pode ser obtida girando-se a semi-reta $z = x$, $x \geq 0$, em torno do eixo z. Assim S tem representação paramétrica

$$\varphi(\theta, t) = (t\cos\theta \ , \ t \operatorname{sen} \theta \ , \ \mathrm{t}) \quad , \quad \mathrm{t} \geq 0 \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Nesta parametrização, S também não é regular em (0,0,0) pois

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\theta,t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -t \operatorname{sen}\theta & t\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} = (t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, -\mathrm{t})$$

é nulo em $t = 0$, apesar de as funções $x(\theta,t)$, $y(\theta,t)$ e $z(\theta,t)$ serem de classe C^1.

É possível encontrar uma parametrização na qual S seja regular em (0,0,0)? (veja exercício 3, §7.2).

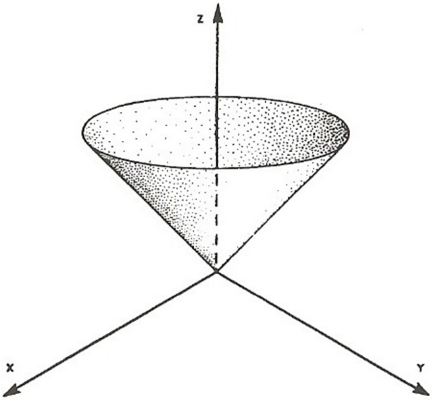


Figura 7.4

§7.2 Exercícios

1. Seja S uma superfície parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (v\cos u, v \operatorname{sen} u, 1 - v^2); \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad , \quad v \geq 0.$$

a) Identifique esta superfície. Esta superfície é regular?

b) Trace as curvas na superfície S, definidas por $\varphi(u_0, v)$ e $\varphi(u, v_0)$, onde:

$$\text{i)}u_0 = 0 \quad , \quad \text{ii)}u_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{iii)}v_0 = 0 \quad , \quad \text{iv)}v_0 = 1.$$

c) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(0, v)$, no ponto $\varphi(0, 1)$.

d) Encontre um vetor tangente à curva, definida por $\varphi(u, 1)$, no ponto $\varphi(0, 1)$.

e) Encontre uma equação da reta normal e a equação do plano tangente a S em $\varphi(0, 1)$.

2. a) Encontre uma parametrização para a superfície obtida girando-se o círculo $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, $0 < r < a$, em torno do eixo z. Esta superfície é chamada toro.

b) Encontre um vetor normal a esta superfície.

c) Esta superfície é regular?

3. Considere as superfícies S_1 e S_2 parametrizadas por

$$\varphi_1(u, v) = (u, v, 0) \quad \text{e} \quad \varphi_2(u, v) = (u^3, v^3, 0) \quad , \quad (u, v) \in I\!R^2,$$

respectivamente.

a) Mostre que S_1 e S_2 são o plano xy.

b) Mostre que S_1 é regular e que S_2 não o é. Conclua que a regularidade de uma superfície S depende da existência de pelo menos uma parametrização na qual S seja regular.

c) É possível encontrar uma parametrização na qual o cone da figura 7.4

seja regular em (0,0,0)?

4. Dada a esfera de raio 2, centrada na origem, encontre a equação do plano tangente a ela no ponto $(1,1,\sqrt{2})$, considerando a esfera como:

a) Uma superfície parametrizada por

$$\varphi(\phi,\theta) = (2 \text{ sen } \phi \cos\theta \ , \ 2 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \ , \ 2\cos\phi) \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

b) Uma superfície de nível de $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

c) O gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

5. a) Encontre uma parametrização para o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

b) Encontre um vetor normal a esta superfície.

c) Encontre a equação do plano tangente à superfície em $(x_0, y_0, 0)$.

6. Considere a superfície parametrizada por

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta \ , \ r \text{ sen } \theta \ , \ \theta) \quad , \quad 0 \leq \text{r} \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

a) Esboce esta superfície.

b) Encontre uma expressão para um vetor normal à superfície.

c) Esta superfície é regular?

No restante deste capítulo consideraremos apenas superfícies que são imagens de funções $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que:

(i) D é um subconjunto limitado e fechado do plano.

(ii) φ é injetora, exceto possivelmente na fronteira de D.

(iii) A superfície é regular, exceto possivelmente num número finito de pontos.

§7.3 Área de superfícies

Definição 7.3: Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$. Definimos a **área* A(S) de S** pela fórmula

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| \, dudv \,, \tag{7.1}$$

onde $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|$ é a norma do vetor $N = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$.

Se S é decomposta como união finita de superfícies S_i, sua área é a soma das áreas das S_i.

Quando S é definida explicitamente pela equação $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, o exemplo 7.1 garante que S pode ser parametrizada por $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$, e $\|N\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$. Logo, a fórmula (7.1) é escrita na forma

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1} \;\; dxdy. \tag{7.2}$$

Podemos justificar a definição 7.3 analisando a integral $\iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| \, dudv$ em termos de somas de Riemann. Por simplicidade, suponhamos que D é um retângulo. Consideremos uma partição regular de ordem n de D, e seja R_{ij} o ij-ésimo retângulo da partição com vértices $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1})$ e (u_{i+1}, v_{j+1}), $i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$. Denotemos os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ em (u_i, v_j) por φ_{u_i} e φ_{v_j}. Os vetores $\Delta u \varphi_{u_i}$ e $\Delta v \varphi_{v_j}$ são tangentes à superfície em $\varphi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, onde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ e $\Delta v = v_{j+1} - v_j$. Estes vetores formam um paralelogramo P_{ij}

---

*Quando discutirmos integrais de superfície, mostraremos (teorema 7.2) que, sob certas condições gerais, a área independe da representação paramétrica de S.

situado no plano tangente à superfície em (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (figura 7.5). Para n suficientemente grande, a área de P_{ij} aproxima a área de $\varphi(R_{ij})$. Como a área de um paralelogramo determinado por dois vetores v_1 e v_2 é $\|v_1 \times v_2\|$, temos que

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \varphi r_{u_i} \times \Delta v \varphi_{v_j}\| = \|\varphi_{u_i} \times \varphi_{v_j}\| \Delta u \Delta v.$$

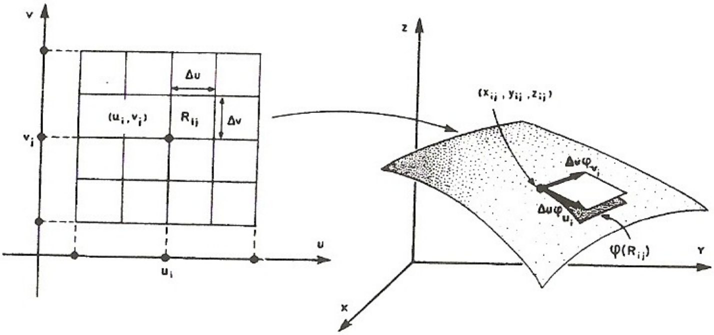


Figura 7.5

Portanto, a área da superfície é aproximada por

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_{u_i} \times \varphi_{v_j}\| \, \Delta u \Delta v.$$

Quando $n \to +\infty$, a seqüência (A_n) converge para a integral

$$\int\!\!\int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| \, dudv.$$

Intuitivamente, quanto maior o n mais A_n se aproxima da área de S. Logo, é razoável definir a área de S pela fórmula (7.1).

Exemplo 7.4: Calcule a área da porção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ compreendida entre os planos $z = 2x$ e $z = 4x$.

Solução: O cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ é a superfície de revolução obtida girando-se a reta $x = a$ $(a > 0)$ no plano xz, em torno do eixo z. Assim, uma representação paramétrica do cilindro é dada por

$$\varphi(\theta, v) = (a\cos\theta \ , \ a \operatorname{sen}\theta \ , \ v) \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ v \in I\!R.$$

Seja S a porção do cilindro compreendida entre os planos $z = 2x$ e $z = 4x$ (figura 7.6). Devido à simetria de S temos que

$$A(S) = 2A(S_1),$$

onde S_1 é a porção de S acima do plano xy . S_1 tem representação paramétrica

$$\varphi(\theta, v) = (a\cos\theta \ , \ a \operatorname{sen}\theta \ , \ v) \, , \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 2a\cos\theta \leq v \leq 4a\cos\theta.$$

Como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\theta, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \operatorname{sen}\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a \operatorname{sen}\theta, 0) \, ,$$

então

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\theta, v) \right\| = \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = a \neq 0.$$

Conseqüentemente, a superfície S_1 é regular em todos os pontos. Por (7.1), temos

$$A(S_1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta} a \, dv d\theta = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\cos\theta \, d\theta = 2a^2[\operatorname{sen}\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4a^2.$$

Logo,

$$A(S) = 8a^2.$$

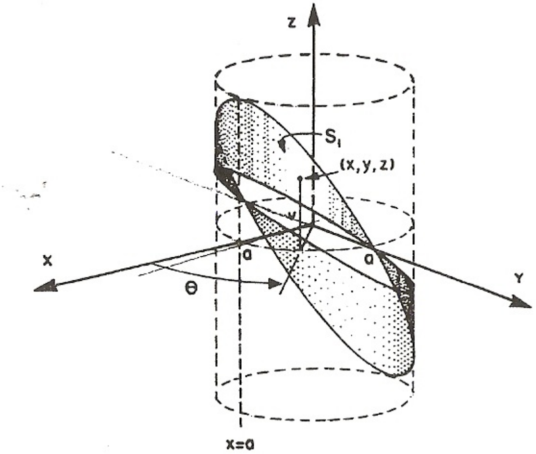


Figura 7.6

Exemplo 7.5: Calcule a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ situada no interior do cilindro $x^2+y^2=ay$, $a>0$.

Solução: A porção da esfera situada no interior do cilindro é constituída de duas partes de áreas iguais, uma no hemisfério superior e outra no hemisfério inferior (figura 7.7).

Chamemos de S_1 a porção do hemisfério superior da esfera situada no interior do cilindro, cuja representação explícita é dada por

$$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad , \quad (x,y)\in D,$$

onde $D=\{(x,y)\in I\!R^2 \mid x^2+y^2\leq ay\}$.

A função $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ possui derivadas parciais contínuas em $D-\{(0,a)\}$. Portanto, S_1 não é regular apenas no ponto (0,a,0). Como $\|N(x,y)\|=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, por (7.2) temos

$$A(S_1)=\int\!\!\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

Usando mudança polar na integral dupla, obtemos

$$A(S_1) = \int_0^{\pi}\int_0^{a\ \mathrm{sen}\ \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,drd\theta = a\int_0^{\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a\ \mathrm{sen}\ \theta} =$$

$$= a\int_0^{\pi}(-a|\cos\theta| + a)\,d\theta = a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta+1)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta+1)\,d\theta\right) =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta+1)\,d\theta = 2a^2[-\ \mathrm{sen}\ \theta+\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = a^2(\pi-2);$$

Logo,

$$A(S) = 2a^2(\pi-2).$$

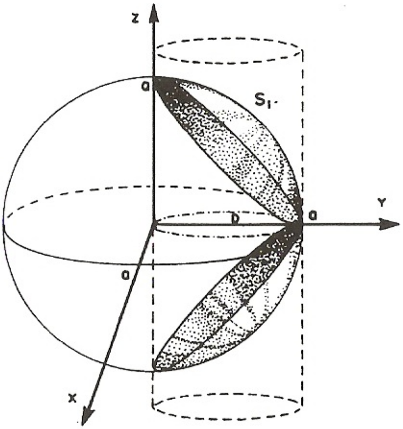


Figura 7.7

Observe que, para calcularmos a área de todo o hemisfério superior S da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, não podemos usar a representação explícita de S, visto que, nesta representação, S não é regular em todos os pontos do círculo $x^2+y^2=a^2$. Neste caso, é conveniente usarmos a representação paramétrica da esfera dada por

$$\varphi(\phi,\theta) = (a\ \mathrm{sen}\ \phi\cos\theta\ ,\ a\ \mathrm{sen}\ \phi\ \mathrm{sen}\ \theta\ ,\ a\cos\phi)\ ,\ \ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\ ,\ \ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Assim,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\phi,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\phi,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi \text{ sen } \theta & -a \text{ sen } \phi \\ -a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta & a \text{ sen } \phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2 \text{ sen }^2\phi\cos\theta, a^2 \text{ sen }^2\phi \text{ sen } \theta, a^2 \text{ sen } \phi\cos\phi),$$

que se anula apenas quando $\phi = 0$. Logo, nesta parametrização, S não é regular apenas no ponto (0,0,a). Como

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\phi,\theta)\times\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\phi,\theta)\right\| = a^2 \text{ sen } \phi,$$

por (7.1) temos que

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a^2 \text{ sen } \phi \, d\phi d\theta = 2\pi a^2[-\cos\phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = 2\pi a^2.$$

§7.4 Exercícios

1. Considere γ o arco da parábola $z = 3 - y^2$ no plano yz compreendido entre as semi-retas $z = 2y$ e $z = \dfrac{11}{2}y$, com $y \geq 0$. Seja S a superfície obtida girando-se γ em torno do eixo z. Pede-se:

   a) Uma parametrização para S.

   b) A área de S.

2. Considerando que a superfície S é obtida girando a curva $z = x^2$, $0 \leq x \leq 4$, em torno do eixo z, pede-se:

   a) Uma parametrização para S.

b) A área da porção de S compreendida entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

3. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície de equação $z = 1 - x^2$, compreendida entre os planos $y = 0, z = 0$, e o cilindro $z = 1 - y^2, y \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa A reais, calcule o preço total da peça.

4. Calcule a área das seguintes superfícies.

a) Superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelo plano $z = 0$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre os planos $z = 0$ e $x + 2z = 3$.

c) Superfície do sólido limitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e a parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) Superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ que não se encontra no interior do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

e) Parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada no interior do cilindro $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

f) Superfície do parabolóide $z = 5 - \dfrac{x^2}{2} - y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

g) Superfície da esfera de raio a centrada na origem limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo-se que o ângulo entre os meridianos é α e a distância entre os planos que contém os paralelos é h.

§7.5 Integral de superfície de função escalar

A definição de integral de superfície de uma função escalar tem uma estreita analogia com a de integral de linha, apesar de a situação geométrica ser diferente.

Definição 7.4: Sejam S uma superfície parametrizada por $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, e $f(x, y, z)$ uma função real contínua definida em S. Definimos a **integral de superfície de f sobre S** por

$$\int\!\!\int_S f\,ds = \int\!\!\int_S f(x,y,z)\,ds = \int\!\!\int_D f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv,^{*} \qquad (7.3)$$

onde $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ são definidos como na seção 7.1.

Se S é decomposta como união finita de superfícies S_i, $i = 1, \cdots, n$, então

$$\int\!\!\int_S f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int\!\!\int_{S_i} f\,ds.$$

Quando S é definida explicitamente pela equação $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, um raciocínio análogo àquele feito após a definição 7.3 fornece

$$\int\!\!\int_S f\,ds = \int\!\!\int_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dxdy. \qquad (7.4)$$

Se $f(x, y, z) = 1$ sobre S, a equação (7.3) se reduz a

---

[*] Mostraremos através do teorema (7.2) que a equação (7.3) independe da representação paramétrica de S.

$$\iint_S ds = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| \, dudv = \text{área } S.$$

Por esta razão, o símbolo ds pode ser interpretado como um "*elemento de área de superfície*", e a integral de superfície $\iint_S f\, ds$ é chamada a integral de f com respeito ao elemento de área ds, estendida sobre a superfície S.

Exemplo 7.6: Considere a superfície S do parabolóide $z = x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 4$. Se a densidade (massa por unidade de área) em cada ponto $(x, y, z) \in S$ é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo de simetria de S, calcule a massa total de S.

Solução: Como o eixo de simetria de S é o eixo z, a densidade em cada ponto $(x, y, z) \in S$ pode ser representada pela função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Portanto, a massa total M de S é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_S f(x,y,z)\, ds = \iint_S (x^2+y^2)\, ds = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy. \end{aligned}$$

Usando mudança polar para resolver a integral dupla, obtemos

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\sqrt{1+4r^2}\, drd\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{16}\left[\frac{(1+4r^2)^{5/2}}{5} - \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{\pi}{60}(1+391\sqrt{17}).$$

Exemplo 7.7: Calcule $\iint_S z\, ds$, onde S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

Solução: A superfície S é a união das superfícies S_1, S_2 e S_3, onde S_1 é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $1 \leq z \leq 4 - x$, S_2 é o plano $z = 1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$, e S_3 é o plano $x + z = 4$ com $x^2 + y^2 \leq 1$ (figura 7.8).

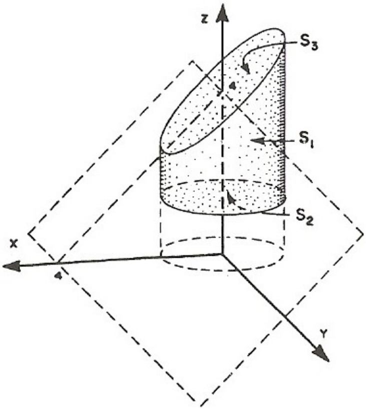


Figura 7.8

Portanto,

$$\iint\limits_{S} z\, ds = \iint\limits_{S_1} z\, ds + \iint\limits_{S_2} z\, ds + \iint\limits_{S_3} z\, ds.$$

A superfície S_1 é parametrizada por

$$\varphi(\theta, v) = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta, v) \quad , \quad (\theta, v) \in D,$$

onde $D = \{(\theta, v) \in I\!R^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 1 \leq v \leq 4 - \cos\theta\}$. Do exemplo 7.4 temos que

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = 1.$$

Logo, por (7.3),

$$\iint\limits_{S_1} z\,ds = \iint\limits_{D} v\,dv d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{4-\cos\theta} v\,dv d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=1}^{v=4-\cos\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(15 - 8\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \frac{31\pi}{2}.$$

Por outro lado,

$$\iint\limits_{S_2} z\,ds = \iint\limits_{S_2} ds = \text{área } S_2 = \pi.$$

Como S_3 é o gráfico da função $z = f(x,y) = 4 - x$, então $\|N\| = \sqrt{2}$. Assim, por (7.4),

$$\iint\limits_{S_3} z\,ds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{2}(4-x)\,dxdy.$$

Usando mudança polar para resolver a integral dupla, obtemos

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{2}(4-x)\,dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4 - r\cos\theta)r\,drd\theta =$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2 - \frac{\cos\theta}{3}\right)d\theta = 4\sqrt{2}\pi.$$

Então

$$\iint\limits_{S} z\,ds = \frac{31\pi}{2} + \pi + 4\sqrt{2}\pi = \frac{\pi}{2}(33 + 8\sqrt{2}).$$

§7.6 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais de superfície:

   a) $\displaystyle\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,ds$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

b) $\displaystyle\iint_S xyz\,ds$, onde S é o triângulo de vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1).

c) $\displaystyle\iint_S (y^2+z^2)\,ds$, onde S é a superfície do sólido limitado pela parte superior da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Seja S a superfície obtida girando-se a curva plana $z=1-x^2$, $0\le x\le 1$, em torno do eixo z. Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,ds$, onde S_1 é a porção de S que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2=y$.

3. Seja S uma superfície fechada tal que $S=S_1\cup S_2$, onde S_1 e S_2 são as superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno do eixo z das curvas $C_1\,:\,z=1-x,\ \ 0\le x\le 1$ e $C_2\,:\,z=0,\ \ 0\le x\le 1$, respectivamente. Se $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ é a função que fornece a densidade (massa por unidade de área) em cada ponto $(x,y,z)\in S$, calcule a massa de S.

4. Sabendo-se que o centro de massa (x_c,y_c,z_c) de uma superfície S é definido por

$$x_c=\frac{\displaystyle\iint_S xf(x,y,z)\,ds}{M}\ ,\quad y_c=\frac{\displaystyle\iint_S yf(x,y,z)\,ds}{M}\quad \text{e}\quad z_c=\frac{\displaystyle\iint_S zf(x,y,z)\,ds}{M},$$

onde M é a massa total de S e $f(x,y,z)$ é a densidade em cada ponto $(x,y,z)\in S$, calcule o centro de massa das seguintes superfícies com densidade constante.

a) S tem representação paramétrica $\varphi(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, $u^2+v^2\le 1$.

b) S é a parte da superfície cônica $z^2=x^2+y^2$ compreendida entre os planos $z=1$ e $z=2$.

§7.7 Integral de superfície de função vetorial

Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$. A esta superfície estão associados dois campos contínuos de vetores normais unitários, a saber:

$$n_1(\varphi(u,v)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\|}$$

e

$$n_2(\varphi(u,v)) = -n_1(\varphi(u,v)).$$

Dizemos que S está **orientada** se fixarmos sobre S um tal campo de vetores.

Se $F : S \subset I\!R^3 \to I\!R^3$ é um campo vetorial contínuo e n um dos campos n_1 ou n_2 definidos anteriormente, denotamos por $F_n = F \cdot n$ a função escalar que a cada ponto de S associa a componente do campo F na direção do vetor n.

Definição 7.5: Seja F um campo vetorial contínuo definido numa superfície orientada S parametrizada por $\varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$. Definimos a **integral de superfície* de F sobre S** por

$$\int\!\!\int_S F \cdot ds = \int\!\!\int_S (F \cdot n)\, ds = \int\!\!\int_S F_n\, ds.$$

Segue da definição de integral de superfície que

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_S (F \cdot n)\, ds &= \int\!\!\int_D [F(\varphi(u,v)) \cdot n(\varphi(u,v))] \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\| dudv = \\ &= \int\!\!\int_D \left[F(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)\right] dudv,\end{aligned} \tag{7.5}$$

---

*Veremos através do teorema 7.2 que, sob certas condições gerais, a integral de superfície de um campo vetorial sobre uma superfície orientada independe da parametrização escolhida.

se $n = n_1$.

Observe que esta integral muda de sinal se considerarmos $n = n_2$.

Quando S é definida explicitamente pela equação $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, temos

$$n_1 = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Neste caso,

$$\int\int_S (F \cdot n)\, ds = \int\int_D \left[F(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)\right] dxdy, \tag{7.6}$$

se $n = n_1$.

Exemplo 7.8: Uma interpretação física da integral de superfície de um campo vetorial.

Suponhamos que um campo vetorial contínuo $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representa um campo de velocidade associado ao escoamento de um fluido em cada ponto da região W. O **fluxo** ou taxa de escoamento por unidade de tempo através de uma superfície S contida em W é dado pela integral de superfície de F sobre S.

De fato, se S é plana e F é um campo constante, então o volume de fluido que passa através de S na unidade de tempo é $(F \cdot n)$ área(S) (figura 7.9). Portanto, o fluxo ϕ é dado por

$$\phi = (F \cdot n)\, \text{área}\ (S).$$

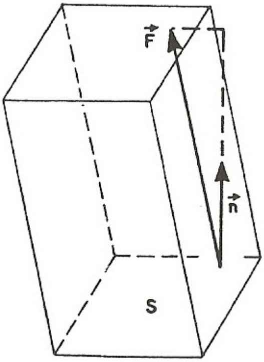


Figura 7.9

Se S é uma superfície (não plana) contida em W, a decompomos mediante curvas coordenadas da forma u =constante, v =constante, e supomos que F é constante em cada parte S_k de S assim formada. Aproximando S por paralelogramos tangentes determinados pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v$, obtemos que o fluxo através de uma parte S_k de S é aproximadamente

$$\begin{aligned}\phi_k &\approx (F(\varphi(u_k, v_k)) \cdot n_k) \text{ área } (S_k) \approx \\ &\approx F(\varphi(u_k, v_k)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_k, v_k) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_k, v_k)\right) \Delta u \Delta v,\end{aligned}$$

como ilustrado na figura 7.10.

Quando $n \to +\infty$, a seqüência das somas

$$\sum_{k=1}^{n} (F(\varphi(u_k, v_k)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_k, v_k) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_k, v_k)\right) \Delta u \Delta v$$

converge para o fluxo total de F através de S. Logo o fluxo ϕ é dado por

$$\phi = \int\int_D F(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du dv = \int\int_S F \cdot ds.$$

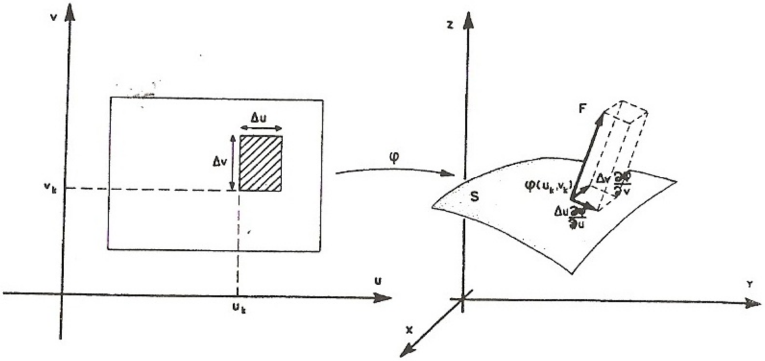


Figura 7.10

Exemplo 7.9: Calcule $\displaystyle\iint_S (F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (x, y, x^2 z)$ e S é a superfície do cilindro $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$, com vetor normal apontando para fora de S.

Solução: O cilindro S (figura 7.11) tem representação paramétrica

$$\varphi(\theta, u) = (1 + \cos\theta, 1 + \operatorname{sen}\theta, u) \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le u \le 4.$$

Um campo de vetores normais que aponta para fora de S em cada ponto é dado por

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\theta,u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0).$$

Logo, por (7.5),

$$\int\int_S (F\cdot n)\,ds =$$
$$= \int\int_S \left[(1+\cos\theta, 1+\ \text{sen}\ \theta, (1+\cos\theta)^2 u)\cdot \frac{(\cos\theta,\ \text{sen}\ \theta, 0)}{1}\right] ds =$$
$$= \int_0^4\int_0^{2\pi}(\cos\theta +\ \text{sen}\ \theta + 1)\,d\theta du = \int_0^4 2\pi\,du = 8\pi.$$

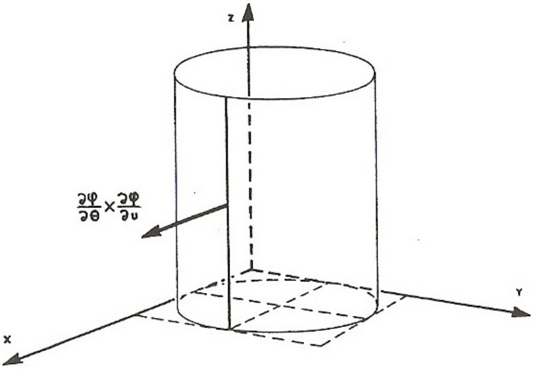

z
$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\varphi}{\partial u}$
Y
X

Figura 7.11

Exemplo 7.10: Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = (x,y,-2z)$ através da superfície S do parabolóide $z = x^2+y^2$, $0\le z\le 1$, com vetor normal apontando para fora de S.

Solução: A superfície S é definida por $z = f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\in D$, onde $D = \{(x,y)\in I\!R^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$. Um campo de vetores normais que aponta para fora de S em cada ponto é dado por

$$N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), -1\right) = (2x, 2y-1).$$

Logo, por (7.6),

$$\phi = \int\int_S (F\cdot n)\,ds \ = \int\int_S \left[(x,y,-2x^2-2y^2)\cdot\frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right] ds =$$
$$= \int\int_D 4(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Usando mudança polar para resolver a integral dupla, obtemos

$$\iint_D 4(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^3\,drd\theta = 2\pi.$$

Exemplo 7.11: Calcule $\iint_S (F\cdot n)\,ds$, onde $F(x,y,z)=(x,-x,-1)$ e S é a porção do plano $x+y+z=0$ situada no interior da esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Especifique a orientação escolhida.

Solução: S é definida por $z=f(x,y)=-x-y$, $(x,y)\in D$, onde

$$D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\,|\,2x^2+2y^2+2xy\le 1\}.$$

Escolhendo o campo de vetores normais a S dado por

$$N=(1,1,1),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\iint_S (F\cdot n)\,ds &= \iint_S \left[(x,-x,-1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right] ds = \iint_S -\frac{1}{\sqrt{3}}\,ds = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{área }(S) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

visto que S é um disco que contém o centro da esfera, possuindo então o mesmo raio da esfera.

Com o intuito de calcular a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva C^1 por partes, é natural orientar as partes de classe C^1 da curva de modo que o ponto final de cada parte coincida com o ponto inicial daquela que a segue. Para integrar um campo vetorial sobre uma superfície que é a união finita de superfícies coladas pelos bordos* comuns, precisamos

---

*Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u,v)$, $(u,v)\in D$. O **bordo ∂S de S** é a curva de S correspondente por φ à fronteira de D.

de um conceito de orientação para a superfície a partir da orientação de cada uma de suas partes.

Definição 7.6: Se S é uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários n, dizemos que o **bordo** ∂S de S está **orientado positivamente** se a superfície S está à esquerda de uma pessoa que caminha ao longo de ∂S com o vetor n representando sua posição vertical, como na figura 7.12.

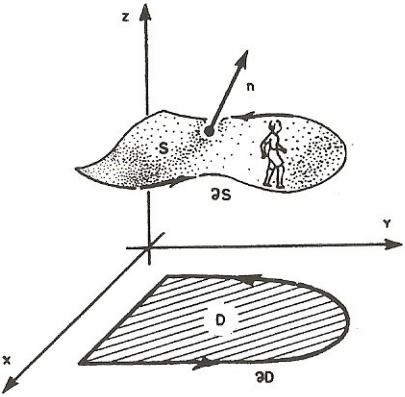


Figura 7.12

Uma superfície S que é união finita de superfícies S_i coladas pelos bordos comuns está **orientada**, se é possível orientar cada parte S_i, de modo que, quando os bordos de suas partes estão orientados positivamente, tenhamos bordos comuns a duas partes sendo percorridos em sentido contrário. A figura 7.13 mostra uma superfície cilíndrica orientada fechada**. Neste caso, se F é um campo vetorial contínuo sobre cada S_i, então

$$\int\!\!\int_S (F \cdot n)\, ds = \sum \int\!\!\int_{S_i} (F \cdot n)\, ds. \tag{7.7}$$

Uma superfície S é dita **fechada se S é a fronteira de uma região limitada do $I\!R^3$.

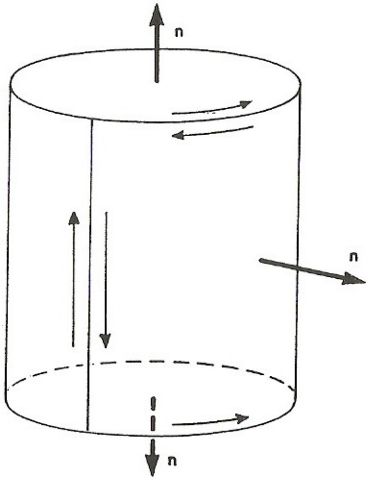


Figura 7.13

Quando não for possível orientar cada parte S_i de modo que isto ocorra, dizemos que a superfície S não é uma superfície orientável.

Um exemplo canônico de uma superfície não orientável é a faixa de Möbius, obtida pela junção de duas faixas retangulares, uma delas com uma torção (figura 7.14).

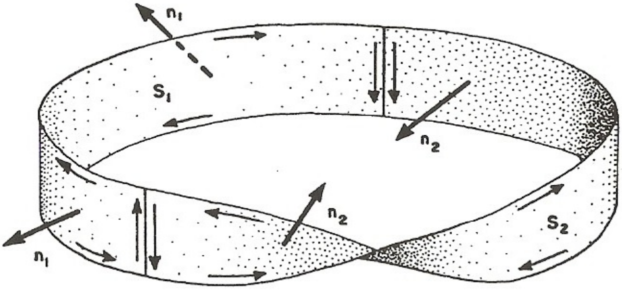


Figura 7.14

Exemplo 7.12: Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_S (F\cdot n)\,ds$, onde $F(x,y,z) = (x,y,2z)$ e S é a união dos planos $y - z = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$, e $y + z = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$.

Solução: S é a união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é a porção do plano $z = y$ cuja projeção no plano xy é o quadrado $D_1 = [0,1]\times[0,1]$, e S_2 é a porção do plano $z = -y$ cuja projeção no plano xy é o quadrado $D_2 = [0,1]\times[-1,0]$.

Se considerarmos S_1 e S_2 com os campos de vetores normais $n_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $n_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, respectivamente, S estará orientada (figura 7.15). Portanto, por (7.7),

$$\int\!\!\int_S (F\cdot n)\,ds = \int\!\!\int_{S_1} (F\cdot n)\,ds + \int\!\!\int_{S_2} (F\cdot n)\,ds =$$
$$= \int\!\!\int_{S_1} (x,y,2y)\cdot\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,ds + \int\!\!\int_{S_2} (x,y,-2y)\cdot\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,ds$$
$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 -y\,dx\,dy + \int_{-1}^0\!\!\int_0^1 y\,dx\,dy = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

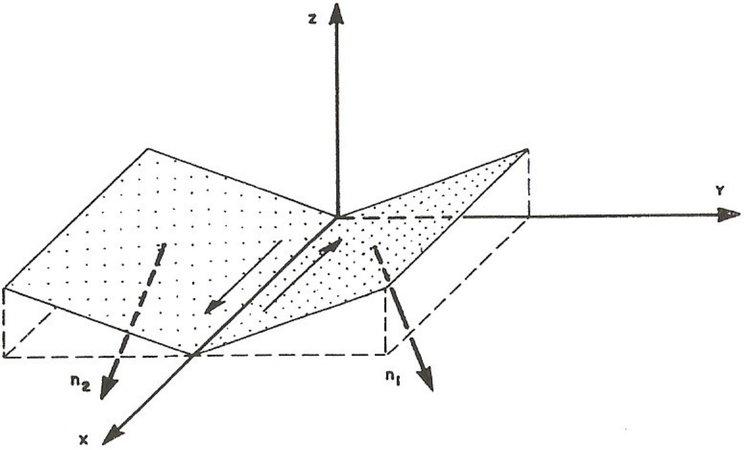


Figura 7.15

Examinaremos agora o comportamento das integrais de superfície quando mudamos a parametrização da superfície S.

Sejam $\varphi_1(u,v)$, $(u,v) \in D_1$, e $\varphi_2(s,t)$, $(s,t) \in D_2$, duas parametrizações de uma superfície orientada S. Dizemos que φ_1 e φ_2 são **equivalentes** se existe uma função

$$\begin{aligned} G : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \ &\longrightarrow D_1 \subset \mathbb{R}^2 \\ (s,t) \ &\longmapsto G(s,t) = (u,v) = (u(s,t), v(s,t)), \end{aligned}$$

G bijetora e de classe C^1, tal que $\varphi_1(G(D_2)) = \varphi_2(D_2) = S$, isto é,

$$\varphi_2(s,t) = \varphi_1(u(s,t), v(s,t)) \quad , \quad (s,t) \in D_2 \tag{7.8}$$

(figura 7.16).

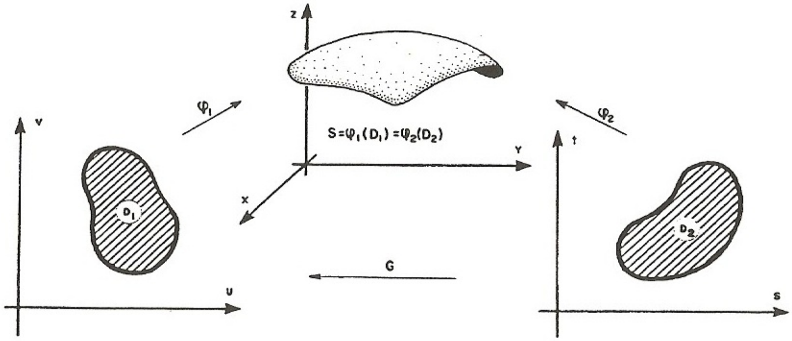


Figura 7.16

Teorema 7.1: *Se* $\varphi_1(u,v)$ e $\varphi_2(s,t)$ *são parametrizações equivalentes de uma superfície regular orientada, então*

$$N_{\varphi_2} = N_{\varphi_1} \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)},$$

onde

$$N_{\varphi_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \quad e \quad N_{\varphi_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}.$$

Demonstração: As derivadas parciais $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}$ são obtidas derivando-se a equação (7.8) pela regra da cadeia, ou seja,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

onde $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ são calculadas em $(u(s,t), v(s,t))$, logo

$$\begin{aligned}
N_{\varphi_2} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\
&= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \\
&= N_{\varphi_1}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.
\end{aligned}$$

Teorema 7.2: *Sejam* $\varphi_1(u,v),\ (u,v) \in D_1$, *e* $\varphi_2(s,t),\ (s,t) \in D_2$, *parametrizações equivalentes de uma superfície regular orientada* S.

i) Se f *é uma função escalar contínua definida em* S, *então*

$$\iint_{\varphi_1(D_1)} f\,ds = \iint_{\varphi_2(D_2)} f\,ds.$$

ii) *Se F é um campo vetorial contínuo definido em S, então*

$$\iint_{\varphi_1(D_1)} (F\cdot n)\,ds = \iint_{\varphi_2(D_2)} (F\cdot n)\,ds,$$

se os vetores normais N_{φ_1} e N_{φ_2} (definidos no teorema 7.1) têm o mesmo sentido em cada ponto de S, e

$$\iint_{\varphi_1(D_1)} (F\cdot n)\,ds = -\iint_{\varphi_2(D_2)} (F\cdot n)\,ds,$$

se os vetores normais N_{φ_1} e *N_{φ_2} têm sentidos opostos em cada ponto de S.*

Demonstração:

i) Pela definição de integral de superfície, temos

$$\iint_{\varphi_1(D_1)} f\,ds = \iint_{D_1} f(\varphi_1(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Utilizando a função G proveniente da equivalência das parametrizações φ_1 e φ_2 para transformar esta integral dupla numa integral dupla sobre a região D_2 do plano st, obtemos

$$\iint_{D_1} f(\varphi_1(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right\| dudv =$$

$$= \iint_{D_2} f(\varphi_1(u(s,t),v(s,t))) \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| dsdt,$$

onde as derivadas parciais $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ na integral do lado direito são calculadas em $(u(s,t), v(s,t))$.

Pelo teorema 7.1, a integral dupla sobre D_2 é igual a

$$\iint_{D_2} f(\varphi_2(s,t)) \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt.$$

Esta integral, por sua vez, é a definição da integral de superfície $\displaystyle\iint_{\varphi_2(D_2)} f\,ds$.

ii) Por (7.5),

$$\iint_{\varphi_1(D_1)} (F\cdot n)\,ds = \iint_{D_1} F(\varphi_1(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v)\right) dudv.$$

Utilizando a mesma mudança de variáveis do caso anterior, obtemos que a integral dupla do lado direito é igual a

$$\iint_{D_2} F(\varphi_1(u(s,t),v(s,t)))\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| dsdt,$$

onde $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}$ são calculadas em $(u(s,t),v(s,t))$.

Se N_{φ_1} e N_{φ_2} têm o mesmo sentido, então, pelo teorema 7.1, $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} > 0$. Portanto, a integral dupla sobre D_2 é igual a

$$\iint_{D_2} F(\varphi_2(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(s,t)\right) dsdt,$$

que é a definição da integral de superfície $\displaystyle\iint_{\varphi(D_2)} (F\cdot n)\,ds$.

Se N_{φ_1} e N_{φ_2} têm sentidos opostos, então a integral dupla sobre D_2 é igual a

$$\iint_{D_2} -F(\varphi_2(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(s,t)\right) dsdt.$$

§7.8 Exercícios

Calcule $\displaystyle\iint_S (F\cdot n)\,ds$ nos exercícios abaixo:

1. $F(x,y,z)=(x,y,-2z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=4$, com vetor normal n exterior.

2. $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e S é o triângulo de vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1), onde o vetor normal n tem componente z não negativa.

3. $F(x,y,z) = (y,z,xz)$ e S é a superfície do sólido W, onde $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$, com vetor normal n exterior.

4. $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e S é a superfície do sólido W, onde $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$, com vetor normal n exterior.

5. $F(x,y,z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy, com vetor normal n exterior.

6. $F(x,y,z) = (-3xyz^2, x+2yz-2xz^4, yz^3-z^2)$ e S é a união da superfície $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, com $z = 0$, $x^2+y^2 \leq 1$, indicando a orientação escolhida para S.

7. $F(x,y,z) = (yz, xz, x^2+y^2)$ e S é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta que liga os pontos (1,0,1) e (0,0,3) em torno do eixo z, onde o vetor normal n tem componente z não negativa.

8. $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, com vetor normal n exterior.

§7.9 Teorema de Stokes

Uma extensão importante do teorema de Green é o teorema de Stokes, que relaciona a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada C no $I\!R^3$ com a integral sobre uma superfície S da qual C é o bordo. Antes de provar o teorema de Stokes, faz-se necessário introduzir alguns conceitos.

Definiremos inicialmente o campo vetorial rotacional. Para isto, consideremos $F = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto do $I\!R^3$. O **campo vetorial rotacional** de F, denotado por **rot F**, é definido por

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right). \qquad (7.9)$$

A equação (7.9) pode ser lembrada mais facilmente se a reescrevermos usando a notação de "*operador*". Introduzamos formalmente o símbolo "∇"

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

para denotar o operador que aplicado a uma função real $w = f(x, y, z)$ nos dá o gradiente de f, isto é,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Denotemos por "$\nabla\times$" o operador que aplicado a um campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ nos dá o produto vetorial formal de ∇ por F, ou seja,

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Portanto, $\nabla \times F$ é o campo vetorial que já denotamos por rot F.

Teorema 7.3 (Teorema de Stokes):

Sejam S uma superfície orientada, parametrizada por $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$, onde D é uma região fechada do plano uv,limitada por uma curva C^1 por *partes, e* φ *uma função de classe* C^2 *num subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$ *contendo* D*. Se* $F = (F_1, F_2, F_3)$ *é um campo vetorial de classe* C^1 *definido num subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^3$ *que contém* S *cujo bordo* ∂S *está orientado positivamente, então*

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \int_{\partial S} F \cdot dr. \tag{7.10}$$

Demonstração: Consideremos S parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad , \quad (u,v) \in D,$$

e orientada com campo de vetores normais $n = \dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|}$, onde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

Por (7.5) temos que

$$\begin{aligned} &\iint\limits_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \\ &= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv, \end{aligned}$$

onde o integrando desta integral dupla é calculado em $\varphi(u,v)$.

Para completar a demonstração basta verificar que

$$\int_{\partial S} F_1\, dx = \iint\limits_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv, \tag{7.11}$$

$$\int_{\partial S} F_2\,dy = \iint\limits_D \left[-\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dudv \tag{7.12}$$

e

$$\int_{\partial S} F_3\,dz = \iint\limits_D \left[\frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right] dudv, \tag{7.13}$$

pois somando estas três equações obtemos a equação (7.10) do teorema de Stokes. Como as três equações são análogas, provaremos apenas (7.11).

Suponhamos que $h(t) = (u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, é uma parametrização da fronteira de D, orientada de modo que $\varphi(h(t))$ seja uma parametrização do bordo ∂S de S, orientado positivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F_1\,dx &= \int_a^b \left[F_1(\varphi(h(t)))\frac{d}{dt}(x(h(t)))\right] dt = \\
&= \int_a^b \left[F_1(\varphi(h(t)))\left(\frac{\partial x}{\partial u}(h(t))u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(h(t))v'(t)\right)\right] dt = \\
&= \int_{\partial D} F_1(\varphi(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv\right) = \\
&= \int_{\partial D} F_1(\varphi(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + F_1(\varphi(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv.
\end{aligned}$$

Como φ é de classe C^2, podemos aplicar o teorema de Green a esta última integral, obtendo

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S} F_1\,dx = \\
&= \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1(\varphi(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_1(\varphi(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\right)\right] dudv.
\end{aligned}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left((F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left((F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\\
=\;&\frac{\partial}{\partial u}(F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial v}+(F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}(F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial u}-(F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\\
=\;&\frac{\partial}{\partial u}(F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}(F_1\circ\varphi)\frac{\partial x}{\partial u}=\\
=\;&\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}-\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}=\\
=\;&-\frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\\
=\;&-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_{\partial S}F_1\,dx=\iint\limits_D\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]dudv,$$

o que prova (7.11).

Observação 7.1: No caso particular em que S é uma região no plano xy e $n=(0,0,1)$, a fórmula (7.10) fornece

$$\int_{\partial S}F_1dx+F_2dy=\int_{\partial S}F\cdot dr=\iint\limits_S(\operatorname{rot}F\cdot n)\,ds=\iint\limits_S\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy.$$

Isto prova que o teorema de Stokes é uma extensão do teorema de Green.

Usando o teorema de Stokes, podemos deduzir uma interpretação para o campo vetorial $\operatorname{rot}F$ que dá alguma informação acerca do próprio F. Sejam P_0 um ponto de um conjunto aberto no qual F é de classe C^1 e B_r uma bola fechada de raio r e centro em P_0 situada no plano perpendicular a n_0, como indicado na figura 7.17.

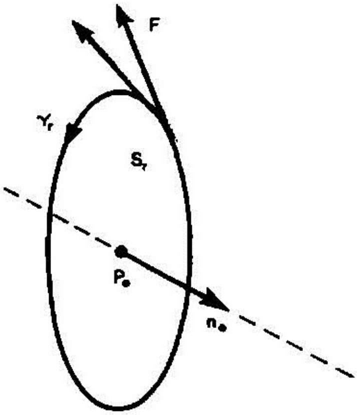


Figura 7.17

Aplicando o teorema de Stokes a F sobre B_r e seu bordo γ_r, obtemos

$$\oint_{\gamma_r} F \cdot dr = \int\int_{B_r} (\text{rot}\, F \cdot n)\, ds.$$

O valor da integral de linha é denominado circulação de F ao longo de γ_r e mede a intensidade do campo tangencial a γ_r. Assim, para r pequeno, a circulação ao longo de γ_r mede a intensidade com que o campo F perto de P_0 gira em torno do eixo determinado por n_0. Por outro lado, a integral de superfície é, para r suficientemente pequeno, aproximadamente igual ao produto escalar $\text{rot}\, F(P_0) \cdot n_0$ multiplicado pela área de B_r. Segue que a circulação ao longo de γ_r tenderá a ser maior se n_0 tiver o mesmo sentido de $\text{rot}\, F(P_0)$. Portanto, podemos interpretar $\text{rot}\, F(P_0)$ como sendo o determinador do eixo em torno do qual a circulação de F é a maior possível perto de P_0.

Exemplo 7.13: Calcule $\oint_C F \cdot dr$, onde $F(x, y, z) = (yz + x^3, 2xz + 3y^2, xy + 4)$ e C é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: A curva C é o bordo da superfície S definida por $z = 1 - x - y$ para $(x, y) \in D$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (figura 7.18).

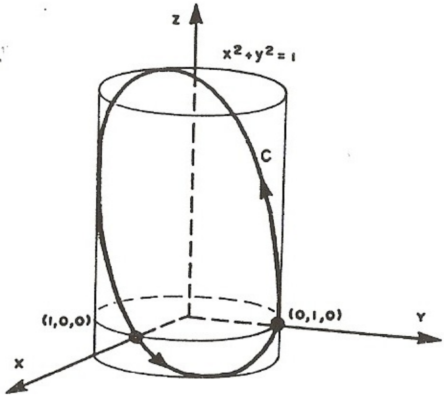


Figura 7.18

O campo vetorial rot F é dado por rot $F(x, y, z) = (-x, 0, z)$. Tomando o campo de vetores normais unitários a S dado por $n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, temos, por (7.10), que

$$\oint_C F \cdot dr = \int\int_S (\operatorname{rot} F \cdot n) ds.$$

Por (7.6),

$$\int\int_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \int\int_D (-x, 0, 1-x-y) \cdot (1, 1, 1)\, dxdy = \int\int_D (1-2x-y)\, dxdy.$$

Usando mudança polar para resolver esta integral dupla, obtemos

$$\begin{aligned} \int\int_D (1 - 2x - y)\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r\cos\theta - r \operatorname{sen}\theta) \mathrm{r\, drd}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_C F \cdot dr = \pi.$$

Verifique este resultado calculando a integral de linha diretamente.

Exemplo 7.14: Considere S a superfície orientada da figura 7.19 e $F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$. Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$.

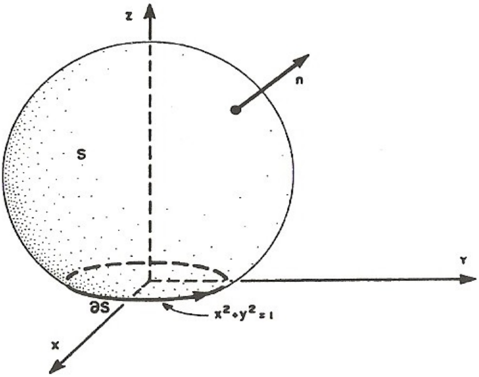


Figura 7.19

Solução: O bordo ∂S de S é a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, orientada no sentido anti-horário. Por (7.10), temos

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds &= \oint_{\partial S} F \cdot dr = \\ &= \oint_{\partial S} y\, dx - x\, dy + e^{xz}\, dz = \\ &= \oint_{x^2+y^2=1} y\, dx - x\, dy.\end{aligned}$$

Usando o teorema de Green para calcular esta última integral, obtemos

$$\oint_{x^2+y^2=1} y\, dx - x\, dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -2\, dxdy = -2\pi.$$

Exemplo 7.15: Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y,z) = (z^2, xz, 2xy)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, com o plano $2x + 3z = 6$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: A integral $\int_C F \cdot dr$ não pode ser calculada com o auxílio do teorema de Stokes. No entanto, se considerarmos a curva fechada $\gamma = C \cup C_1$ (figura 7.20), onde C_1 é a curva parametrizada por $x(t) = 3$, $y(t) = t$ e $z(t) = 0$, $-1 \leq t \leq 1$, então γ é o bordo da superfície S definida por $z = f(x,y) = 2 - \frac{2}{3}x$, $(x,y) \in D$, onde

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid \frac{3+3y^2}{2} \leq x \leq 3 \quad , \quad -1 \leq y \leq 1\},$$

orientada pelo campo de vetores normais unitários $n = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

Como $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (x, 0, z)$, a fórmula (7.10) do teorema de Stokes nos fornece

$$\oint_{\gamma = C \cup C_1} F \cdot dr = \iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds.$$

Por (7.6),

$$\begin{aligned}
\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds &= \iint_D \left(x, 2z - 2y, 2 - \frac{2}{3}x\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right) dxdy = \\
&= \iint_D \left(\frac{2}{3}x + 2 - \frac{2}{3}x\right) dxdy = 2\int_{-1}^{1} \int_{\frac{3+3y^2}{2}}^{3} dxdy = \\
&= 3\int_{-1}^{1} (1 - y^2)dy = 3\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C F \cdot dr = 4 - \int_{C_1} F \cdot dr = 4,$$

pois

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{-1}^{1} 0 dt = 0.$$

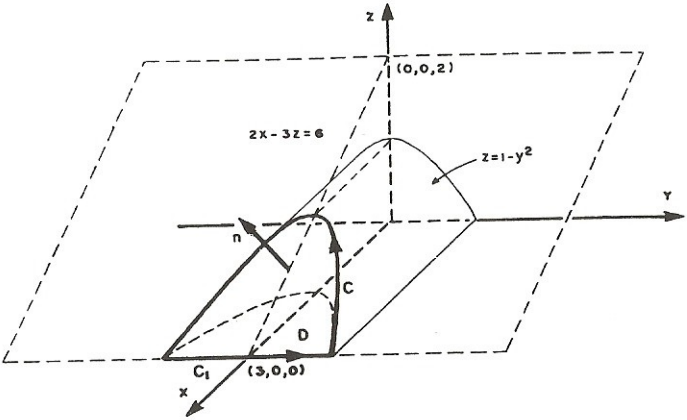


Figura 7.20

O teorema a seguir, que é análogo ao teorema 6.4, caracteriza os campos vetoriais de $I\!R^3$ que são campos gradientes.

Teorema 7.4: *Seja F um campo vetorial de classe C^1 definido em $I\!R^3$, exceto possivelmente em um número finito de pontos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\oint_C F \cdot dr = 0$, *qualquer que seja a curva fechada C, C^1 por partes.*

(ii) *Para quaisquer pontos A e B em $I\!R^3$, $\int_A^B F \cdot dr$ independe da curva C^1 por partes que os liga.*

(iii) *F é um campo gradiente de alguma função f, isto é, $\nabla f = F$.*

(iv) $\operatorname{rot} F = 0$.

Demonstração: A demonstração de (i) implica (ii) é análoga à do teorema 6.4.

Vamos provar que (ii) implica (iii).

Seja C uma curva C^1 por partes ligando (0,0,0) a (X, Y, Z) (se F não é de classe C^1 em (0,0,0), o substituímos por um ponto onde F seja de classe C^1). Admitindo (ii) podemos definir

$$f(X, Y, Z) = \int_C F \cdot dr.$$

Escolhendo C como na figura 7.21, temos

$$f(X, Y, Z) = \int_0^X F_1(t, 0, 0)dt + \int_0^Y F_2(X, t, 0)dt + \int_0^Z F_3(X, Y, t)dt,$$

onde $F = (F_1, F_2, F_3)$.
Segue imediatamente que $\dfrac{\partial f}{\partial Z} = F_3$. Podemos mostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial X} = F_1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial Y} = F_2$, escolhendo uma poligonal C como na figura 7.21. Portanto, $\nabla f = F$.

Esta prova nos dá outro método (através de integrais definidas) para o cálculo de uma função potencial de um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$.

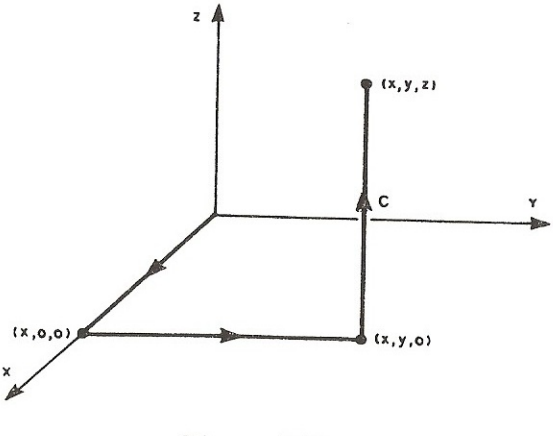


Figura 7.21

Mostremos que (iii) implica (iv).

Se $F = \nabla f$, isto significa que $F_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $F_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $F_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Como F é de classe C^1 exceto possivelmente num número finito de pontos, então f é de classe C^2 exceto possivelmente num número finito de pontos. Pela definição do $\operatorname{rot} F$, temos

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right).$$

Pela simetria das derivadas parciais mistas concluímos que $\operatorname{rot} F = 0$.

Finalmente, verifiquemos que (iv) implica (i).

Seja C uma curva fechada e S uma superfície cujo bordo seja C, escolhida de modo que o campo F seja de classe C^1 em todos os pontos de S. Aplicando a equação (7.10) do teorema de Stokes, temos

$$\oint_C F \cdot dr = \int\int_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = 0,$$

pois, por hipótese, $\operatorname{rot} F = 0$.

Exemplo 7.16: Calcule a integral do campo vetorial $F(x, y, z) = (yz + x^2, xz + 3y^2, xy)$ ao longo da curva C obtida como interseção da superfície $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = 1$.

Solução: Consideremos a curva C orientada no sentido de $A = \left(\dfrac{3}{2}, 1, 0\right)$ para $B = \left(-\dfrac{3}{2}, 1, 0\right)$, conforme a figura 7.22.

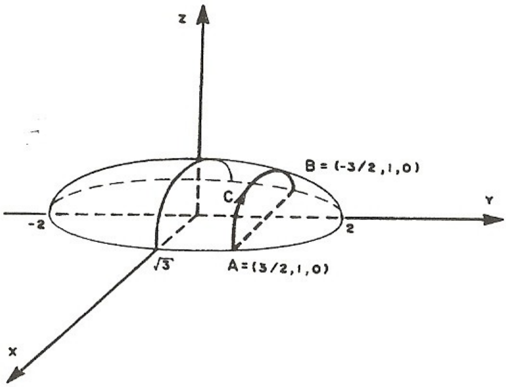


Figura 7.22

O campo vetorial F é de classe C^1 e rot $F = 0$ (verifique!). Portanto, pelo teorema 7.4, F é um campo gradiente. Para encontrar a função potencial f, resolvemos o sistema de equações

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yz + x^2, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= xz + 3y^2, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= xy,
\end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= xyz + \frac{x^3}{3} + A(y,z), \\
f(x,y,z) &= xyz + y^3 + B(x,z), \\
f(x,y,z) &= xyz + C(x,y).
\end{aligned}$$

Assim, a função $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{x^3}{3} + y^3$ é uma função potencial de F.

Utilizando o teorema 6.2, temos

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A) = f\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) - f\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) = -\frac{9}{4}.$$

§7.10 Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, use o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando, em cada caso, a orientação da curva C.

1. $\oint_C ydx + zdy + xdz = -2\pi\sqrt{2}$, onde C é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.

2. $\oint_C (3y + z)dx + (x + 4y)dy + (2x + y)dz = -\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{4}$, onde C é a curva obtida como interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $y + z = a$.

3. $\oint_C 2xydx + [(1 - y)z + x^2 + x]dy + \left(\dfrac{x^2}{2} + e^z\right) dz = \pi$, onde C é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

4. $\oint_C (y + z^3x^2)dx + (2z + 5x + y^3)dy + (4y + z\cos x)dz = -\dfrac{16}{3}\sqrt{6}\pi$, onde C é a curva obtida como interseção do parabolóide $z = \dfrac{x^2}{3} + 2y^2$ com o plano $3z + 2x = 5$.

5. $\oint_C (8x - 2y)dx + ydy + 3zdz = 4\sqrt{3}$, onde C é a fronteira do triângulo equilátero situado no plano $-3x + \sqrt{3}z + 6 = 0$ de vértices $P = (2, 2, 0)$, $Q = (2, 6, 0)$ e $R = (2 + \sqrt{3}, 4, 3)$.

6. $\oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$, onde C é a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

7. Seja F um campo vetorial cujo rotacional em cada ponto de $\mathbb{R}^3$ é dado por $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (x, -2y, z)$. Calcule $\oint_C F \cdot dr$, onde C é o contorno do semifuso esférico, de ângulo $\frac{\pi}{4}$, indicado na figura 7.23.

8. Seja C a circunferência de raio a, no plano $2x + 2y + z = 4$, centrada no ponto $(1, 2, -2)$. Se $F(x,y,z) = (y - x, z - x, x - y)$, determine o valor de a para que $\oint_C F \cdot dr = -\frac{8\pi}{3}$.

9. Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (y, 2x, xyz)$ e S é a superfície lateral da pirâmide da figura 7.24 com normal n exterior a S.

10. Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (x - x^2 z, yz^3 - y^2, x^2 y - xz)$ e S é qualquer superfície cujo bordo seja uma curva fechada no plano xy.

11. Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (2xy, 0, -xz)$ e S é a superfície do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

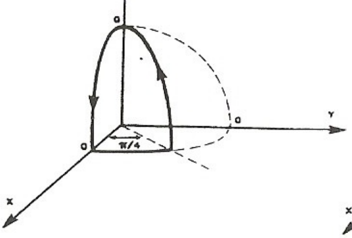


Figura 7.23

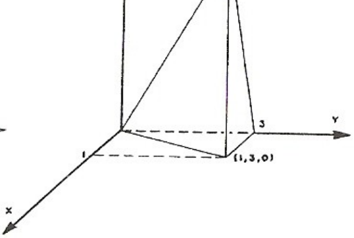


Figura 7.24

12. Calcule $\int_C (2xyz + \operatorname{sen} x)dx + (x^2z + e^y)dy + \left(x^2y + \frac{1}{z}\right)dz$, onde C é a curva parametrizada por $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^2 t, (t+1)^2)$, $0 \leq t \leq \pi$.

13. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$ e C é a curva parametrizada por $\sigma(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{1-e^t}{1-e}\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

14. Calcule $\int_C (4xy - 3x^2z^2)dx + 2x^2dy - 2x^3zdz$, onde C é a interseção da superfície $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = 1$. Indique a orientação escolhida.

15. Calcule $\int_C (2xyz + 2x)dx + x^2zdy + x^2ydz$, onde C é a curva obtida como interseção da superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ com o plano $x + y = 2$. Especifique a orientação escolhida.

16. Seja $F(x,y,z) = (2xz + y^2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2)$.

    a) F é um campo conservativo no $\mathbb{R}^3$? Por quê?

    b) Seja C a curva obtida como interseção da superfície de equação $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq -4$ com o plano $y = 2$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, especificando a orientação escolhida.

17. Determine $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y,z) = (yz + x^3, xz + 3y^2, xy + 4)$ e C é a curva obtida como interseção das superfícies de equações $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$, e $x + z = 5$, orientada no sentido de crescimento de y.

18. Seja $F(x,y,z) = \left(e^x \operatorname{sen} y + \frac{x}{x^2+y^2}, e^x \cos y + \frac{y}{x^2+y^2}, z^2\right)$. Mostre que o valor da integral do campo F ao longo de qualquer curva fechada C que não intercepte o eixo z é zero.

19. Seja $F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$. Mostre que $\oint_C F \cdot dr = 2\pi$, onde C é a curva $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, orientada no sentido anti-horário.

§7.11 Teorema de Gauss (Teorema da divergência)

O teorema de Stokes expressa uma relação entre a integral sobre uma superfície e a integral de linha sobre a curva que é o bordo desta superfície. O teorema de Gauss, que passamos a expor, relaciona uma integral tripla num sólido de $I\!\!R^3$ com a integral sobre a superfície que é fronteira deste sólido.

Seja W uma região limitada de $I\!\!R^3$, tendo como fronteira uma superfície ∂W. Diremos que ∂W está **orientada positivamente** se o vetor normal em cada ponto de ∂W aponta para fora de W. Por exemplo, se W é a região de $I\!\!R^3$ definida por

$$W = \{(x, y, z) \in I\!\!R^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

sua fronteira ∂W é formada por duas esferas centradas na origem. ∂W está orientada positivamente se os vetores normais à esfera exterior apontarem no sentido contrário à origem, e os vetores normais à esfera interior apontarem para a origem, como mostra a figura 7.25.

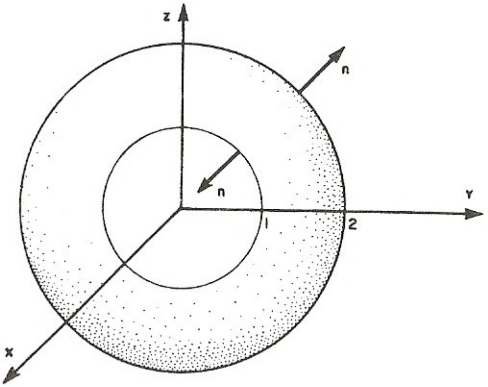


Figura 7.25

Para enunciar o teorema de Gauss, definiremos primeiramente o **diver-**

gente de um campo vetorial F. Para isto, consideremos

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

um campo vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. O **divergente de F**, denotado por **div F**, é definido por

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Teorema 7.5 (Teorema de Gauss):

Seja W uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira ∂W é uma superfície orientada positivamente. Se F é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém W, então

$$\int\!\!\int_{\partial W} (F \cdot n)\, ds = \int\!\!\int\!\!\int_{W} \operatorname{div} F \, dxdydz. \tag{7.14}$$

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que W é uma região simples, isto é, W é uma região de tipo I, II e III simultaneamente.

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$, podemos escrever o lado direito de (7.14) na forma

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int\!\!\int_{W} \operatorname{div} F \, dxdydz = \\
= \; &\int\!\!\int\!\!\int_{W} \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dxdydz + \int\!\!\int\!\!\int_{W} \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dxdydz + \int\!\!\int\!\!\int_{W} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dxdydz.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a integral de superfície da equação (7.14) é dada por

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int_{\partial W} (F \cdot n)\, ds = \int\!\!\int_{\partial W} [(F_1, F_2, F_3) \cdot n]\, ds = \\
= \; &\int\!\!\int_{\partial W} [(F_1, 0, 0) \cdot n]\, ds + \int\!\!\int_{\partial W} [(0, F_2, 0) \cdot n]\, ds + \int\!\!\int_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n]\, ds.
\end{aligned}$$

A demonstração estará concluída se provarmos as identidades

$$\iiint\limits_{W} \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial W} [(F_1, 0, 0) \cdot n]\, ds, \tag{7.15}$$

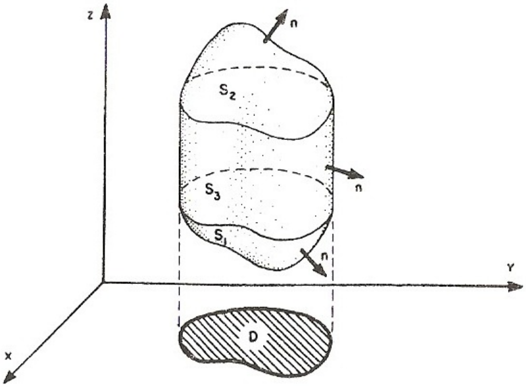
$$\iiint\limits_{W} \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial W} [(0, F_2, 0) \cdot n]\, ds, \tag{7.16}$$

$$\iiint\limits_{W} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n]\, ds. \tag{7.17}$$

Para provar (7.17), descrevemos W como uma região de tipo I, ou seja,

$$W = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \quad , \quad (x, y) \in D\}.$$

Esta região é limitada inferiormente por uma superfície S_1 de equação $z = f_1(x, y), (x, y) \in D$, limitada superiormente por uma superfície S_2 de equação $z = f_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e (possivelmente) por uma superfície S_3 que é uma porção de cilindro gerada por uma reta paralela ao eixo z ao longo da fronteira de D, como mostra a figura 7.26.



Figúra 7.26

Temos

$$\iiint\limits_W \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz\right] dxdy = \\ = \iint\limits_D [F_3(x,y,f_2(x,y)) - F_3(x,y,f_1(x,y))]\,dxdy.$$

Por outro lado,

$$\iint\limits_{\partial W} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds = \\ = \iint\limits_{S_1} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds + \iint\limits_{S_2} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds + \iint\limits_{S_3} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds.$$

Em S_3, o campo de vetores normais unitários é paralelo ao plano xy. Logo, $(0,0,F_3)\cdot n = 0$ e, portanto,

$$\iint\limits_{S_3} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds = 0.$$

Em S_2, o campo de vetores normais que aponta para fora de W é dado por

$$N_2 = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1\right).$$

Então, por (7.6),

$$\iint\limits_{S_2} [(0,0,F_3)\cdot n]\,ds = \\ = \iint\limits_D \left[(0,0,F_3(x,y,f_2(x,y)))\cdot\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1\right)\right] dxdy = \\ = \iint\limits_D F_3(x,y,f_2(x,y))\,dxdy.$$

Em S_1, o campo de vetores normais que aponta para fora de W é dado por

$$N_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right).$$

Logo, por (7.6),

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1} [(0,0,F_3)\cdot n]\, ds = \\
&= \iint_D \left[(0,0,F_3(x,y,f_1(x,y))\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)\right] dxdy = \\
&= \iint_D -F_3(x,y,f_1(x,y))\, dxdy.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_{\partial W} [(0,0,F_3)\cdot n]\, ds = \iint_D [F_3(x,y,f_2(x,y)) - F_3(x,y,f_1(x,y))]\, dxdy,$$

o que prova 7.17. A demonstração de (7.15) e (7.16) é análoga.

Quando W não é simples, podemos decompô-la como uma união finita de regiões simples, isto é, $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$ (a região da figura (7.25) é uma união de oito regiões simples, uma em cada octante). Usando a fórmula (7.14) do teorema de Gauss em cada região simples, obtemos

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = \iint_{\partial W_1} (F\cdot n)\, ds + \cdots + \iint_{\partial W_n} (F\cdot n)\, ds.$$

Observando que os vetores normais exteriores à fronteira comum de duas regiões simples são opostos, concluímos que as integrais de superfície correspondentes são simétricas e, portanto, se cancelam. Assim,

$$\iint\limits_{\partial W_1} (F \cdot n)\, ds + \cdots + \iint\limits_{\partial W_n} (F \cdot n)\, ds = \iint\limits_{\partial W} (F \cdot n)\, ds,$$

o que completa a demonstração.

Usando o teorema de Gauss, podemos dar uma interpretação para o divergente de um campo vetorial F num ponto P_0. Para isto, consideremos W_r o sólido limitado pela esfera de raio r e centro no ponto P_0, contido no subconjunto aberto de $I\!R^3$ no qual F é de classe C^1.

Aplicando o teorema de Gauss ao campo F sobre W_r, obtemos

$$\iiint\limits_{W_r} \operatorname{div} F\, dxdydz = \iint\limits_{\partial W_r} (F \cdot n)\, ds,$$

onde n representa o campo de vetores normais unitários exteriores a W_r.

Pelo teorema do valor médio para integrais temos que

$$\iiint\limits_{W_r} \operatorname{div} F\, dxdydz = \operatorname{div} F(P')V(W_r), \tag{7.18}$$

onde P' é um ponto conveniente em W_r e $V(W_r)$ é o volume de W_r, o que nos permite escrever (7.18) na forma

$$\operatorname{div} F(P') = \frac{1}{V(W_r)} \iint\limits_{\partial W_r} (F \cdot n)\, ds.$$

Fazendo o diâmetro d_r de W_r tender a zero, obtemos

$$\operatorname{div} F(P_0) = \lim_{d_r \to 0} \frac{1}{V(W_r)} \iint\limits_{\partial W_r} (F \cdot n)\, ds,$$

ou seja, o div $F(P_0)$ nos dá o fluxo do campo F por unidade de volume em P_0.

Exemplo 7.17: Calcule $\displaystyle\iint_S (F\cdot n)\,ds$, onde $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=1$ e $z=-1$, com a normal a S apontando para fora do sólido.

Solução: S é uma superfície fechada, fronteira da região

$$W = \{(x,y,z)\in I\!R^3 \mid x^2+y^2\le 1 \quad , \quad -1\le z\le 1\}.$$

Usando a fórmula (7.14) do teorema de Gauss, temos

$$\iint_S (F\cdot n)\,ds = \iiint_W \operatorname{div} F\,dxdydz.$$

Como $\operatorname{div} F(x,y,z) = y^2+x^2$, então

$$\begin{aligned}\iiint_W \operatorname{div} F\,dxdydz &= \iiint_W (x^2+y^2)\,dxdydz = \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[\int_{-1}^{1} (x^2+y^2)\,dz\right] dxdy = \\ &= 2\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\,dxdy.\end{aligned}$$

Fazendo mudança de coordenadas polares para resolver a integral dupla, obtemos

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,drd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\iint_S (F\cdot n)\,ds = \pi.$$

Exemplo 7.18: O exercício 8 da seção 7.8 mostra que o fluxo do campo $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)$ que sai de uma esfera S_a de raio a e centro na origem é 4π, isto é, independe do raio da esfera.

Mostre, usando o teorema de Gauss, que o fluxo de F que sai de qualquer superfície fechada S envolvendo a origem também é 4π.

Solução: Seja W a região compreendida entre S e a esfera S_a, conforme a figura 7.27. Sua fronteira é $\partial W = S \cup S_a$, onde S está orientada com vetor normal apontando para fora de W e S_a com vetor normal apontando para a origem.

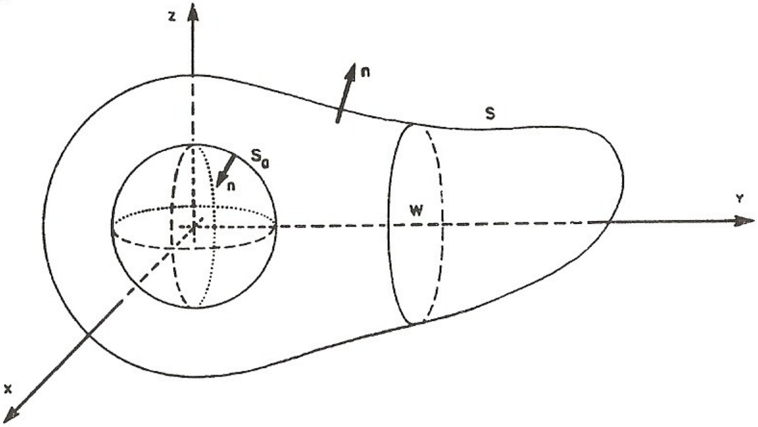


Figura 7.27

Como $(0,0,0) \notin W$, então F é de classe C^1 em W. Aplicando o teorema de Gauss ao campo F sobre W, obtemos

$$\iiint_W \operatorname{div} F\, dxdydz = \iint_{\partial W} (F\cdot n)\, ds = \iint_S (F\cdot n)\, ds + \iint_{S_a} (F\cdot n)\, ds.$$

Um cálculo rotineiro mostra que $\operatorname{div} F = 0$ (verifique!). Portanto,

$$\iint_S (F\cdot n)\, ds = -\iint_{S_a} (F\cdot n)\, ds = 4\pi.$$

Observação 7.2: Se F é um campo vetorial de classe C^2, então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0,$$

isto é, o divergente de um campo rotacional é nulo.

De fato, supondo $F = (F_1, F_2, F_3)$, temos que

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Logo,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

O lado direito desta última identidade é nulo, em virtude da simetria das derivadas parciais mistas de F_1, F_2 e F_3.

Exemplo 7.19: Calcule $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$, onde S é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, com a porção do plano $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com vetor normal exterior, e $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

Solução: A integral $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$ pode ser calculada com o auxílio do teorema de Stokes. Neste caso, por (7.10),

$$\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \oint_C F \cdot dr,$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 1$, orientada no sentido horário. Deixamos o cálculo da integral de linha para o leitor.

No entanto, a integral $\displaystyle\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$ também pode ser resolvida utilizando o teorema de Gauss. Para isto, considere a região W de $\mathbb{R}^3$ limitada por S e pela superfície S_1 que é a porção do plano $z = 1$ com $x^2 + y^2 \leq 1$, ambas orientadas com vetor normal apontando para fora de W. Então, por (7.14),

$$\iiint\limits_{W} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)\, dxdydz = \iint\limits_{S \cup S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds. \tag{7.19}$$

Pela observação 7.2, o lado esquerdo de (7.19) é nulo. Assim,

$$0 = \iint\limits_{S \cup S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \iint\limits_{S} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds + \iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds.$$

Logo,

$$\iint\limits_{S} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = -\iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds. \tag{7.20}$$

Vamos agora calcular $\displaystyle\iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds$.

Como $\operatorname{rot} F = (-3z^2yx, x + 2zy - 2xz^4, z^3y - z^2)$ e o campo de vetores normais unitários a S_1 é $n = (0, 0, 1)$, temos

$$\iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} (y - 1)\, dxdy.$$

Usando mudança polar para resolver esta integral dupla segue que

$$\begin{aligned} \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} (y - 1)\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \operatorname{sen} \theta - \mathrm{r})\, \mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (7.20), obtemos

$$\iint\limits_{S} (\operatorname{rot} F \cdot n)\, ds = \pi.$$

§7.12 Exercícios

1. Calcule $\displaystyle\iint_S (F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = \left(2x + xy\ , -zy, \dfrac{z^2}{2} - y^2 z\right)$, S é a superfície cilíndrica fechada limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 1$, cuja base no plano xy é limitada pelas curvas de equações: $x^2 + (y-1)^2 = 4,\ y \geq 1$; $x^2 + (y+1)^2 = 4,\ y \leq -1$; $(x-2)^2 + y^2 = 1,\ x \geq 2$; $(x+2)^2 + y^2 = 1,\ x \leq -2$, e n é a normal exterior a S.

2. Calcule $\displaystyle\iint_S (F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (x, -2y + e^x \cos z, z + x^2)$ e S é definida por:

$$\begin{cases} z = 9 - (x^2 + y^2) & , \quad 0 \leq z \leq 5 \\ z = 5 & , \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 8 - 3(x^2 + y^2) & , \quad x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$$

com campo de vetores normais exterior a S.

3. Uma função $f(x,y,z)$ é dita harmônica se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ para qualquer $(x,y,z) \in I\!R^3$. Mostre que, se f é de classe C^2 e harmônica e S é uma superfície fechada, então $\displaystyle\iint_S (\nabla f \cdot n)\, ds = 0$.

4. Encontre o fluxo do campo $F(x,y,z) = \left(e^y + \cos yz, -2zy + \operatorname{sen} xz, z^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ através da superfície S, orientada positivamente, união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2\ ,\ 0 \leq z \leq 2$, e S_2 tem equação $z = 1 + x^2 + \dfrac{y^2}{2}\ , 1 \leq z \leq 2$.

5. Considere a superfície S união de S_1 e S_2, onde S_1 é dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 2\sqrt{2}$, e S_2 é definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 16\ ,\ 8 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ e $z \geq 0$. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = (y^2 x, z^2 y + x, x^2 z - 5)$ através da superfície S com campo de vetores normais exterior a S.

6. Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{3} + y, \dfrac{y^3}{3}, \dfrac{z^3}{3} + 2\right)$ através da superfície S do sólido W definido por

$$W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1\ ,\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2+y^2}\},$$

com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.

7. Sejam $F(x,y,z) = (x,y,z)$ um campo vetorial em $I\!R^3$ e W a pirâmide de vértices O, A, B, C, onde $O = (0,0,0)$, $A = (0,1,0)$, $B = (0,0,1)$ e $C = (c,1,0)$ $(c > 0)$. Calcule o valor de c sabendo que

$$\iint\limits_{S_W} (F \cdot n)\, ds + \iint\limits_{S_{ABC}} (F \cdot n)\, ds = 1,$$

onde S_W é a superfície da pirâmide W, S_{ABC} é a face de vértices A, B, C, e n é o campo de vetores normais apontando para fora da pirâmide.

8. Calcule $\displaystyle\iint\limits_{S} (\text{rot}\, F \cdot n)\, ds$, onde $F(x,y,z) = (2xy, 0, -xz)$ e S é o elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

9. Considere a superfície S obtida girando-se o segmento de reta que liga os pontos (1,0,1) e (0,0,3) em torno do eixo z. Calcule $\displaystyle\iint\limits_{S} (\text{rot}\, F \cdot n)\, ds$, onde n é o campo de vetores normais exterior a S e F é um campo vetorial em $I\!R^3$ definido por $F(x,y,z) = \left(-\dfrac{y^3}{3} + ze^x, \dfrac{x^3}{3} - \cos yz, xy\right)$.

10. Seja T o tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (2,0,0)$, $B = (0,6,0)$ e $C = (0,0,2)$. Sejam S a superfície lateral de T constituída pelas faces de T que não estão no plano xy, e $F(x,y,z) = (3y+z, x+4z, 2y+x)$ um campo vetorial de $I\!R^3$. Calcule $\displaystyle\iint\limits_{S} (\text{rot}\, F \cdot n)\, ds$, com a normal exterior a S.

11. Calcule:

a) O fluxo de $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}(x,y,z)$ através da superfície do sólido W limitado pelas esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+z^2=b^2$, $a<b$, orientadas com sentidos opostos (n aponta para fora do sólido W).

b) O fluxo de $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)$ através das faces do cubo W definido por

$$W=\{(x,y,z)\in I\!\!R^3 \mid -1\leq x\leq 1\,,\ -1\leq y\leq 1\,,\ -1\leq z\leq 1\}.$$

12. Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z)=(2x,-z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2},y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2})$ através da superfície S definida pelas equações

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1 & , \quad z\geq 0,\\[2ex] \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 & , \quad -3\leq z\leq 0,\\[2ex] z=-3 & , \quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1. \end{cases}$$

13. Seja W uma região fechada e limitada de $I\!\!R^3$, cuja fronteira, ∂W, é a união de duas superfícies S_1 e S_2, orientadas com vetor normal exterior a W. Considere o vetor normal a S_1 com terceira componente positiva. Qual o valor de $\displaystyle\iint_{S_2}(F\cdot n)\,ds$, onde $F(x,y,z)=(e^{y^2+z^2},y+2\sqrt{5},-2y)$, sabendo que S_1 é uma porção do plano $2y+z=1$ com 5 unidades de área e que W possui 30 unidades de volume.

APÊNDICE

FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Nas seções 1, 2 e 3 deste apêndice abordaremos casos particulares do teorema da função implícita, para os quais é possível dar uma interpretação geométrica. Na seção 4 veremos a versão geral deste teorema, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em Rudin, W., 1976, p. 225-227.

§A.1 Curvas no plano xy definidas implicitamente

Usualmente a equação de uma curva no plano xy é dada na forma $y = f(x)$. Pode acontecer, no entanto, que ela se apresente na forma $F(x, y) = 0$ como, por exemplo, a reta $ax + by + c = 0$, a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Para obtermos a equação na forma $y = f(x)$ devemos "*resolver*" a equação $F(x, y) = 0$ para y. Impõe-se, naturalmente, a seguinte pergunta: "*Dada $F(x, y)$, é sempre possível obter uma única função $y = f(x)$ ou $x = g(y)$ satisfazendo à equação $F(x, y) = 0$?*". A resposta é negativa. Basta considerarmos as funções $F(x, y) = x^2 + y^2$, $G(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ e $H(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Se, por um lado, $F(x, y) = 0$ é satisfeita apenas para $x = y = 0$, por outro, não há números reais que satisfaçam $G(x, y) = 0$. Por sua vez, a equação $H(x, y) = 0$ pode ser "*resolvida*" por mais de uma função $y = f(x)$. Observe, no entanto, que se tomarmos (x_0, y_0) com $y_0 > 0$ satisfazendo $H(x_0, y_0) = 0$, então apenas $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisfaz $H(x, y) = 0$ e $y_0 = f(x_0)$.

Portanto, dado (x_0, y_0) satisfazendo $F(x, y) = 0$, o nosso problema reside em encontrar condições que garantam a existência de uma única função $y = f(x)$ que satisfaça $F(x, y) = 0$ e $y_0 = f(x_0)$. Quando existir tal função, diremos que ela é **definida implicitamente** pela equação $F(x, y) = 0$.

Do ponto de vista geométrico, como a equação $z = F(x, y)$ define uma superfície em $I\!R^3$, então a equação $F(x, y) = 0$ representa uma curva de nível. Logo, dado (x_0, y_0) satisfazendo $F(x_0, y_0) = 0$, o problema consiste em determinar condições que garantam a existência de uma única função $y = f(x)$ cujo gráfico coincida com a curva de nível $F(x, y) = 0$ numa vizinhança* do ponto (x_0, y_0).

Notemos que, no ponto (x_0, y_0), temos duas possibilidades para o vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

(i) O vetor $\nabla F(x_0, y_0)$ é nulo

ou

(ii) O vetor $\nabla F(x_0, y_0)$ é não nulo.

No caso (i) podemos ver, através dos exemplos a seguir, que nenhum resultado geral pode ser estabelecido.

Exemplo A.1: $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ e $x_0 = y_0 = 0$. Nenhum outro ponto do plano xy satisfaz esta equação.

Exemplo A.2: $F(x, y) = (y - x)^4 = 0$ e $x_0 = y_0 = 1$. Esta equação define implicitamente a função $y = x$.

Exemplo A.3: $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ e $x_0 = y_0 = 0$ (esta equação representa uma lemniscata). Não existe uma vizinhança de (0,0) na qual a curva $F(x, y) = 0$ represente o gráfico de uma função $y = f(x)$ ou $x = g(y)$.

No caso (ii) temos o seguinte teorema.

---

*Uma **vizinhança** de $X_0 \in I\!R^n$ é um subconjunto de $I\!R^n$ que contém uma bola aberta $B_r(X_0)$ centrada em X_0 e raio r, onde $B_r(X_0) = \{X \in I\!R^n \mid \|X - X_0\| < r\}$.

Teorema da função implícita: *Seja* $F(x,y)$ *uma função com derivadas parciais* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *contínuas num subconjunto aberto* U *do plano* xy, *e seja* $(x_0,y_0) \in U$ *satisfazendo* $F(x_0,y_0) = 0$ *e tal que* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. *Então existem um intervalo aberto* I *centrado em* x_0 *e uma única função definida em* I, *que satisfaz* $y_0 = f(x_0)$ *e* $F(x, f(x)) = 0$ *qualquer que seja* $x \in I$. *Além disso,* f *é continuamente diferenciável em* I *e*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \quad , \quad x \in I. \tag{A.1}$$

A equação (A.1) é conseqüência da derivação da identidade $F(x, f(x)) = 0$, usando a regra da cadeia. É claro que o teorema anterior pode ser enunciado sob a hipótese $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$, com as modificações pertinentes. Neste caso, a equação $F(x,y) = 0$ define $x = g(y)$, com $g'(y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}$.

Exemplo A.4: Verifique que a equação $x^3y^3 - x - y + 1 = 0$ define y como função de x numa vizinhança de $P_0 = (1,1)$, e obtenha a derivada de $y = f(x)$ quando $x = 1$.

Solução: Seja $F(x,y) = x^3y^3 - x - y + 1 = 0$. Temos $F(1,1) = 0$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^3 - 1$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^3y^2 - 1$ são contínuas e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$. Pelo teorema da função implícita a equação dada define $y = f(x)$ numa vizinhança de $P_0 = (1,1)$ e

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -1.$$

Exemplo A.5: Seja $y = f(x)$ uma função cuja derivada é contínua num intervalo aberto contendo x_0 e tal que $f'(x_0) \neq 0$. Mostre que esta função possui uma inversa derivável g num intervalo aberto contendo $f(x_0)$ e calcule a derivada de g, usando o teorema da função implícita.

Solução: Podemos escrever $y = f(x)$ na forma $F(x,y) = f(x) - y = 0$. Pondo $y_0 = f(x_0)$, temos $F(x_0, y_0) = 0$. Além disso, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -1$ são contínuas num subconjunto aberto do plano xy contendo (x_0, y_0). Como $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$, pelo teorema da função implícita existe uma única função $x = g(y)$ definida num intervalo aberto contendo $f(x_0)$ satisfazendo $F(x,y) = f(x) - y = 0$ e

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)} = \frac{1}{f'(x)} \quad ,$$

que é a fórmula da derivada da função inversa vista no Cálculo de uma variável.

Geometricamente, a condição $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ no ponto P_0 significa que o vetor ∇F em P_0 não é paralelo ao eixo x (figura A.1). Se, ao contrário, o vetor ∇F no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é paralelo ao eixo x, podemos afirmar que a equação $F(x,y) = 0$ não define $y = f(x)$ numa vizinhança de P_0? A resposta é negativa (figura A.1, pontos Q e R).

Quando o vetor ∇F no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é paralelo ao eixo x, ocorre que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0) \neq 0$. Então a equação $F(x,y) = 0$ define $x = g(y)$ numa vizinhança de P_0 e $g'(y_0) = 0$, isto é, y_0 é um ponto crítico da função $x = g(y)$. Assim, temos as possibilidades:

(i) y_0 é ponto de máximo ou mínimo da função $x = g(y)$ e, neste caso, a equação $F(x,y) = 0$ não define $y = f(x)$ numa vizinhança de P_0.

ou

(ii) y_0 é ponto de inflexão da função $x = g(y)$, e então a equação $F(x,y) = 0$ define $y = f(x)$ numa vizinhança de P_0. Mas $y'(x_0)$ não existe.

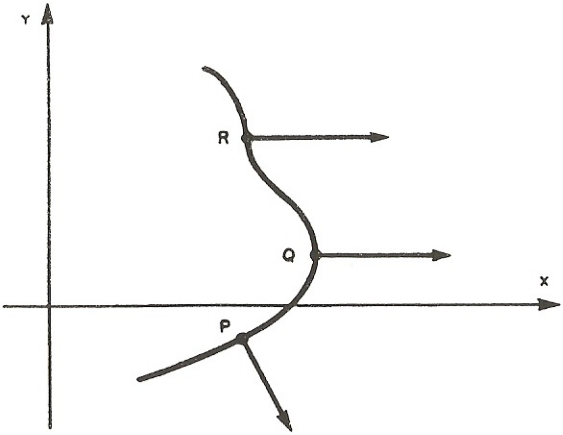


Figura A.1

Exercícios

1. Considere a curva definida por $5x^2 + y^2x^2 + 6xy = 0$.

   a) Verifique se esta equação define y como função de x numa vizinhança de $(1, -1)$.

   b) Em caso afirmativo, encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(1, -1)$.

2. Seja C uma curva no plano xy definida pela equação $x^2 + xy + y^2 = 27$.

   a) Determine os pontos da curva C na vizinhança dos quais não podemos definir y como função de x.

   b) Encontre os pontos críticos da função $y = f(x)$ definida implicitamente pela curva C, para $y > 3$.

   c) Estude a natureza dos pontos críticos encontrados no item b).

3. Dê um exemplo de uma função $F(x, y)$ tal que $F(x, y) = 0$ defina implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), mas

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$

4. Considere a equação $(x-2)^3 y + x e^{y-1} = 0$.

   a) Esta equação define y como função de x numa vizinhança do ponto (1,1)?

   b) E numa vizinhança de (0,0)?

   c) E numa vizinhança de (2,1)?

5. Seja $F(u, v)$ uma função com derivadas parciais contínuas tal que $F(4,2) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(4,2) = 1$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}(4,2) = -3$. Sabendo-se que $u = x + y^2$ e $v = y + y \operatorname{sen} x$,

   a) verifique que a equação $F(u(x,y), v(x,y)) = 0$ define y como função de x numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (0,2)$.

   b) determine $\dfrac{dy}{dx}$ em $x_0 = 0$.

6. Encontre os pontos da lemniscata de equação $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ em que as retas tangentes são horizontais.

7. Encontre os pontos do Folium de Descartes de equação $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ nos quais a reta tangente é:

   a) Uma reta horizontal.

   b) Uma reta vertical.

§A.2 Superfícies definidas implicitamente

Uma superfície em $I\!R^3$ pode ser descrita por uma equação da forma $F(x,y,z) = 0$. Algumas vezes é possível "*resolver*" esta equação para uma variável em função das outras duas, por exemplo, z como função de x e y. O teorema da função implícita nos dará condições que garantam a existência e unicidade de tal função. Neste caso, dizemos que a equação $F(x,y,z) = 0$

define z implicitamente como uma função de x e y e escrevemos $z = f(x, y)$, embora nem sempre seja possível obter $f(x, y)$ explicitamente.

Teorema da função implícita: *Seja* $F(x, y, z)$ *uma função com derivadas parciais* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$ *contínuas num subconjunto aberto* U *de* $\mathbb{R}^3$, *e seja* $(x_0, y_0, z_0) \in U$ *satisfazendo* $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *e tal que* $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. *Então existem uma bola aberta* $B = B_r(x_0, y_0)$ *e uma única função* $z = f(x, y)$ *definida em* B *tal que* $z_0 = f(x_0, y_0)$ *e* $F(x, y, f(x, y)) = 0$ *qualquer que seja* $(x, y) \in B$. *Além disso,* f *possui derivadas parciais contínuas em* B *dadas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{A.2}$$

As equações (A.2) são obtidas por derivação da identidade $F(x, y, f(x, y)) = 0$ em relação a x e y, respectivamente, usando a regra da cadeia.

Geometricamente, a condição $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ no ponto P significa que o vetor gradiente $\nabla F(P)$, que é perpendicular à superfície definida por $F(x, y, z) = 0$ em P, não é paralelo ao plano xy.

Exemplo A.6: Verifique que a equação $x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y = 9$ define z como função de x e y numa vizinhança do ponto (1,0,1), e calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

Solução: Seja $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3 y - 9 = 0$. Temos $F(1, 0, 1) = 0$, as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 + 8z^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 6y - 3z^3$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = = 16xz - 9z^2 y$ são contínuas e $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 16 \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, a equação dada define $z = f(x, y)$ numa vizinhança de (1,0,1). Por (A.2),

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{3x^2+8z^2}{16xz-9z^2y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{6y-3z^3}{16xz-9z^2y}.$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{11}{16} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{3}{16}.$$

Exercícios

1. a) Verifique que a equação $(x^2+y^2+z^2)^2 = -x^2+y^2-z^2+10$ define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto (1,−1,1).
b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}(1,-1)$, onde u é o vetor unitário na direção da reta tangente à curva $y = x^2$ quando $x = 1$, no sentido dos x crescentes.

2. Considere a superfície dada por $5xz + y^2z^2 + 6xy = 0$.
a) Mostre que z é definido implicitamente como função de x e de y próximo do ponto $P = (1,1,-3)$, e calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$.
b) Seja $g(x,y,z) = 3x^2yz + y^2z^2 - 16xy$, onde (x,y,z) pertence à superfície definida por $5xz + y^2z^2 + 6xy = 0$. Calcule a taxa de variação de g em relação a x no ponto P.

3. A equação $x + z + (y+z)^2 = 6$ define z implicitamente como função de x e de y numa vizinhança do ponto (5,−1,1). Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ no ponto $(5,-1)$.

4. As três equações $F(u,v) = 0$, $u = xy$ e $v = \sqrt{x^2+z^2}$, definem uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
a) Verifique que a equação $F(u(x,y,z), v(x,y,z)) = 0$ define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(1,1,\sqrt{3})$, sabendo que $F(1,2) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1,2) = 1 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial v}(1,2) = 2.$$

b) Encontre um vetor normal a esta superfície no ponto $(1, 1, \sqrt{3})$.

5. A equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} - 1 = 0$ define implicitamente $z = f(x, y)$ numa vizinhança de $\left(1, \dfrac{\sqrt{11}}{6}, 2\right)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em $\left(1, \dfrac{\sqrt{11}}{6}, 2\right)$.

§A.3 Curvas em $\mathbb{R}^3$ definidas implicitamente

Consideremos duas superfícies em $I\!R^3$ de equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ que se interceptam ao longo de uma curva C. Algumas vezes é possível "*resolver*" estas duas equações simultaneamente para duas variáveis em função da terceira, por exemplo, x e y em função de z. O teorema da função implícita nos dá condições que garantem a existência e unicidade de tais funções. Neste caso, dizemos que as equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ definem x e y implicitamente como funções de z e escrevemos $x = x(z)$ e $y = y(z)$. Portanto, a curva C pode ser parametrizada na variável z.

Teorema da função implícita: *Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$ funções com derivadas parciais contínuas num subconjunto aberto U de $I\!R^3$, e seja $(x_0, y_0, z_0) \in U$ satisfazendo $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0) = 0$, e tal que o determinante*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

não se anula em (x_0, y_0, z_0). Então existem um intervalo aberto I centrado em z_0 e um único par de funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$ definidas em I, que *satisfazem a* $x_0 = x(z_0)$, $y_0 = y(z_0)$, $F(x(z), y(z), z) = 0$ e $G(x(z), y(z), z) = 0$ *qualquer que seja* $z \in I$. *Além disso,* x *e* y *são continuamente diferenciáveis em* I *e*

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \text{ em } I. \tag{A.3}$$

As equações (A.3) são as soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{\partial F}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{\partial G}{\partial z}, \end{cases}$$

obtido derivando-se as identidades $F(x(z), y(z), z) = 0$ e $G(x(z), y(z), z) = 0$ em relação a z, usando a regra da cadeia.

O determinante que aparece no teorema é chamado **determinante Jacobiano** das funções F e G com relação às variáveis x e y, e denotado por

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Geometricamente, a condição $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \neq 0$ em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ significa que o vetor tangente à curva C em P_0 não é paralelo ao plano xy, visto que

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ é a terceira componente do vetor $\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0)$ que tem a direção da reta tangente à curva C em P_0.

Exemplo A.7: As superfícies $2x^2+3y^2-z^2=25$ e $x^2+y^2=z^2$ se interceptam ao longo de uma curva C passando pelo ponto $P=(\sqrt{7},3,4)$. Verifique se esta curva pode ser parametrizada no parâmetro z e use essa parametrização para determinar um vetor tangente a C em P.

Solução: Sejam $F(x,y,z)=2x^2+3y^2-z^2-25=0$ e $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$. Temos $F(\sqrt{7},3,4)=0=G(\sqrt{7},3,4)$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=4x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)==6y$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=-2z$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y,z)=2x$, $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y,z)=2y$ e $\dfrac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)=-2z$ são contínuas, e

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}4x & 6y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=-4xy.$$

Portanto $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\sqrt{7},3,4)=-12\sqrt{7}\neq 0$, e então podemos concluir que a curva C pode ser parametrizada por $x=x(z)$, $y=y(z)$, $z=z$, para z pertencente a um intervalo aberto I centrado em $z=4$. Um vetor tangente à C em P é $\left(\dfrac{dx}{dz}(4),\dfrac{dy}{dz}(4),1\right)$, onde

$$\frac{dx}{dz}(4)=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}(\sqrt{7},3,4)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\sqrt{7},3,4)}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

e

$$\frac{dy}{dz}(4)=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(\sqrt{7},3,4)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\sqrt{7},3,4)}=-\frac{4}{3}.$$

Exercícios

1. Supondo que as equações $x^2y + z = 0$ e $xyz + 1 = 0$ definem implicitamente x e y como funções de z numa vizinhança do ponto $P = (1, 1, -1)$, calcule $\frac{dx}{dz}$ e $\frac{dy}{dz}$ em $z = -1$.

2. O ponto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisfaz às equações $xyt + \operatorname{sen} xyt = 0$ e $x + y + t = 0$. Elas definem x e y implicitamente como funções de t numa vizinhança de (0,1,−1)?

3. a) Verifique que a curva C obtida como interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2y$ pode ser parametrizada no parâmetro z numa vizinhança do ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

   b) Use esta parametrização para determinar uma equação do plano normal à curva C no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

§A.4 Teorema da função implícita (caso geral)

Sejam $F_i\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, m)$ funções com derivadas parciais contínuas num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0, z_1^0, \cdots, z_m^0) \in U$ tal que $F_i(P_0) = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$. Se o determinante Jacobiano $\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(z_1, \cdots, z_m)}$ é não nulo em P_0, existem uma bola aberta B de centro no ponto $(x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e um único conjunto de funções $z_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, m)$ com derivadas parciais contínuas em B, que satisfazem $z_i^0 = f_i(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ e $F_i(x_1, \cdots, x_n, f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)) = 0$ para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in B$ e todo $i = 1, \cdots, m$.

Exemplo A.8: Verifique que o sistema de equações

$$\begin{cases} xu^2 + v - y = 0, \\ 2yu - xv^3 - 3v = 0, \end{cases} \tag{A.4}$$

define u e v como funções de x e y numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (1, 2, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais de u e v em relação a x no ponto $(x, y) = (1, 2)$.

Solução: Sejam $F(x, y, u, v) = xu^2 + v - y = 0$ e $G(x, y, u, v) = 2yu - xv^3 - 3x = 0$.

Temos $F(1, 2, 1, 1) = 0 = G(1, 2, 1, 1)$, as derivadas parciais de F e G são contínuas, e

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2xu & 1 \\ 2y & -3xv^2 \end{vmatrix} = -6x^2uv^2 - 2y.$$

Portanto, $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(1, 2, 1, 1) = -10 \neq 0$, e podemos concluir que o sistema (A.4) define u e v como funções de x e de y.

Derivando as equações de (A.4) em relação a x, obtemos

$$\begin{cases} u^2 + 2xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ 2y\dfrac{\partial u}{\partial x} - v^3 - 3xv^2\dfrac{\partial v}{\partial x} - 3 = 0. \end{cases}$$

Em particular, se $P = (x, y) = (1, 2)$, temos o sistema

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(P) & = -1, \\ 4\dfrac{\partial u}{\partial x}(P) - 3\dfrac{\partial v}{\partial x}(P) & = 4, \end{cases}$$

cujas soluções são $\dfrac{\partial u}{\partial x}(P) = \dfrac{1}{10}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}(P) = -\dfrac{6}{5}$.

Exemplo A.9: Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \end{cases} \tag{A.5}$$

sendo $x(u,v)$ e $y(u,v)$ definidas num subconjunto aberto $U \subset I\!R^2$. Este sistema define uma aplicação $T\colon U \subset I\!R^2 \to I\!R^2$, dada por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y)$. Se as funções x e y possuem derivadas parciais contínuas em U e $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ é não nulo em $(u_0,v_0) \in U$, então existe uma bola aberta B de centro em $(x_0,y_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$ onde o sistema de equações (A.5) pode ser resolvido de modo único, com

$$\begin{cases} u &= u(x,y), \\ v &= v(x,y) \quad , \quad (x,y) \in B. \end{cases} \tag{A.6}$$

Logo, a aplicação T possui uma inversa T^{-1} definida em B. Além disso, as funções de (A.6) têm derivadas parciais contínuas em B dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{J} \;,\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{J} \;,\; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{J} \;\text{ e }\; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{J}.$$

Finalmente, se escrevermos

$$J^* = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

teremos $J^* = \dfrac{1}{J}$.

De fato, introduzindo as funções

$$F(u,v,x,y) = x(u,v) - x \quad \text{e} \quad G(u,v,x,y) = y(u,v) - y,$$

temos

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \text{em} \quad (u_0, v_0).$$

Pelo teorema da função implícita, o sistema de equações

$$\begin{cases} F(u,v,x,y) = x(u,v) - x &= 0, \\ G(u,v,x,y) = y(u,v) - y &= 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

define um único par de funções $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ numa bola aberta B de centro em $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$. Além disso, estas funções têm derivadas parciais contínuas em B, obtidas derivando-se as equações (A.7) em relação a x e a y, usando a regra da cadeia.

Finalmente,

$$J^* = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}}{J} & -\dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}}{J} \\ -\dfrac{\frac{\partial y}{\partial u}}{J} & \dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{J} \end{vmatrix} = \frac{1}{J}.$$

Exercícios

1. É possível "*resolver*" o sistema de equações

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3, \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2, \end{cases}$$

para $u(x,y,z)$ e $v(x,y,z)$, próximo de $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$? Calcule $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ em $(x,y,z) = (1,1,1)$.

2. As três equações

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2,$$
$$xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 0,$$

definem x, y, z como funções de u e v próximo do ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$? Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ em $(u, v) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

3. Suponha que a função T definida por

$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

possua uma função inversa diferenciável S definida por

$$(u, v) = S(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Se $x(1, 2) = 3$, $y(1, 2) = 4$ e $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, 2) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(3, 4)$.

4. Se $(u, v) = F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, para que pontos (x_0, y_0) a função F tem inversa definida numa bola aberta de centro no ponto $F(x_0, y_0)$?

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, T. M. *Calculus*. 2.ed. [s.l.]: Xerox College Publishing, 1967 v. I.

______. *Calculus*. 2.ed. [s.l.]: Xerox College Publishing, 1969, v. II.

CARMO, M. P. *Elementos de geometria diferencial*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico; Brasília: Editora UnB, 1971.

COURANT, R. *Cálculo diferencial e integral*. Porto Alegre: Editora Globo, 1955, v. I e II.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico; Brasília: Editora UnB, 1975.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1986, v. 2.

KAPLAN, W. *Cálculo avançado*. [s.l.]: Editora Edgard Blucher Ltda., 1972, v. I.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3.ed. [s.l.]: Editora Harbra Ltda., 1994, v. 2.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1981, v. I.

PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Moscou: Editorial Mir, 1969, tomo II.

RUDIN, W. *Principles of matematical analysis*. 3.ed. [s.l.]: McGraw Hill International Book Company, 1976.

SHENK, A. *Cálculo com geomteria analítica*. São Paulo: Editora Campus, 1984, v. 2.

TROMBA, A. J.; MARSDEN, J. E. *Vector calculus*. 2.ed. [s.l.]: W. H. Freeman and Company, 1981.

WILLIAMSON, R. E.; CROWELL R. H.; TROTTER, H. F. *Cálculo de funções vetoriais*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1974, v. I e II.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Exercícios 1.2

1. a) $x + y = 1$; b) $x + y = 1$, $x \geq -1$; c) $x + y = 1$, $0 \leq x \leq 1$;

   d) $y^2 = x^3$; e) $x = y^2 - 2y - 3$; f) $y = 1 - 2x^2$, $-1 \leq x \leq 1$;

   g) $x^2 + (y+3)^2 = 1$; h) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; i) $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$.

2. a) reta paralela ao eixo z passando pelo ponto (2,1,0).

   b) segmento de reta que liga os pontos $(-1,-1,-1)$ e (1,1,1).

   c) elipse no plano $z = 5$ de centro em (0,0,5) e semi-eixos 2 e 3.

   d) semi-circunferência no plano $x = 3$ de centro em (3,0,0) e raio 1.

   e) semi-parábola, no plano $y = 2$, com vértice no ponto $(-1,2,0)$.

3. a) $\sigma(t) = (3t, -2 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$; b) $\sigma(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

   c) $\sigma(t) = (a + r\cos t, b + r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

   d) $\sigma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$;

   e) $\sigma(t) = (a\sec t, b\,\mathrm{tg}\,t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

   ou $\sigma(t) = (a\cosh t, b\,\mathrm{senh}\,t)$, $t \in \mathbb{R}$;

   f) $\sigma(t) = (1 + 2t, -1 + 3t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$;

   g) $\sigma(t) = (-1 + 3t, 3t, 2 + t)$, $0 \leq t \leq 1$.

4. a) $x(t) = 4t$; $y(t) = \dfrac{4}{4 + 4t^2}$, $t \in \mathbb{R}$; c) $y(x) = \dfrac{16}{4 + x^2}$.

5. c) $y(x) = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ 8. b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

9. $\sigma(t) = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4} - \dfrac{\pi}{2}, t + \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \pi\right)$

10. $x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}t \quad , \quad y(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}t \ , \ t \in \mathbb{R}$

11. $-x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

12. a) $y - x = 1$; b) $y(x) = 1 + e^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$

16. a) $x(t) = c_1 + c_2 e^{kt} \quad , \quad y(t) = c_3 + c_4 e^{kt}$, onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes reais.

b) semi-reta

17. a) $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\cos t)$;

b) $x(t) = -1 \ , \ y(t) = -t \ , \ z(t) = 1 + 2t \ , \ t \in \mathbb{R}$

18. $x(t) = t \ , \ y(t) = 1 \ , \ z(t) = 1 \ , \ t \in \mathbb{R}$

Exercícios 1.4

1. a) $V(t) = (-6\operatorname{sen} 6t, 6\cos 6t)$; b) $A(t) = (-36\cos 6t, -36\operatorname{sen} 6t)$;

c) $v(\frac{\pi}{9}) = 6$; d) $T_1(\frac{\pi}{9}) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $T_2 = -T_1$

2. a) $V(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, -3\cos t)$; b) $A(t) = (-4\cos 2t, 3\operatorname{sen} t)$;

c) $v(\pi) = 3$; d) $T_1(\pi) = (0, 1)$ e $T_2 = -T_1$

3. a) $V(t) = (2e^{2t}, 2t)$; b) $A(t) = (4e^{2t}, 2)$; c) $v(0) = 2$; d) $T_1(0) = (1, 0)$ e $T_2 = -T_1$

4. a) $V(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$; b) $A(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$;

c) $v(\frac{\pi}{2}) = 1$; d) $T_1(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, 0)$ e $T_2 = -T_1$

5. a) $V(t) = (0, 1, 2t)$; b) $A(t) = (0, 0, 2)$; c) $v(2) = \sqrt{17}$;

d) $T_1(2) = \left(0, \frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$ e $T_2 = -T_1$

6. a) $V(t) = (-6 \operatorname{sen} 2t, 6 \cos 2t, 8)$; b) $A(t) = (-12 \cos 2t, -12 \operatorname{sen} 2t, 0)$;

c) $v\left(\frac{\pi}{8}\right) = 10$; d) $T_1\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{4}{5}\right)$ e $T_2 = -T_1$

7. a) $P = (10, 50)$; b) R_1 chega primeiro ; c) R_1 será multado

8. c) $P_1 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{13+3\sqrt{5}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{13-3\sqrt{5}}{2}\right)$;

d) (1,3) e a velocidade mínima é 1

9. b) sentido anti-horário ; c) $(-1, 0)$

10. $\sigma(2) = (2, 0)$, $V(2) = (3, 12)$ e $A(2) = (2, 26)$

11. a) $\sigma_1(t) = (\cos(20t + \theta_0), \operatorname{sen}(20t + \theta_0))$ e

$\sigma_2(t) = (2\cos(20t^2 + \theta_0), 2\operatorname{sen}(20t^2 + \theta_0))$, onde $\theta_0 = \theta(0)$;

b) 1 hora ; c) 80km/h

12. A velocidade máxima é 2 e ocorre no instante $t = \pi$

13. $x(t) = t\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{1800}\right)$, $y(t) = t\cos\left(\dfrac{\pi t}{1800}\right)$, $t \geq 0$

14. a) 4 segundos ; b) 200 metros

15. $x(t) = 14t$, $y(t) = -5t^2 + 14t$. A distância entre David e Golias era de 39,2 metros.

16. a) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$; c) $y = x^2 - 4$, $-4 \leq y \leq 0$

17. b) $\sigma(t) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos(\sqrt{3}t), \text{sen}\,(\sqrt{3}t)\right)$; d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Exercícios 1.6

1. a) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$; b) $2\pi^2 a$; c) $2\sqrt{2}\pi$; d) 50 ; e) $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 1)$

2. $\dfrac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8)$ 3. $\dfrac{3a}{2}$ 4. $\dfrac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}$

5. a) $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$ e $t_2 = \dfrac{5\pi}{3}$; b) $4\sqrt{3}$

7. a) $\sigma_1(t) = (t, t)$, $-2 \leq t \leq 2$ e $\sigma_2(t) = (2\cos t, 2 + 2\,\text{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq \dfrac{5\pi}{4}$
   b) $\dfrac{8\sqrt{2} + 5\pi}{2}$

Exercícios 1.9

2. $\dfrac{1}{2}$

3. a) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e $\rho = 2\sqrt{2}$; b) $k = \dfrac{1}{2}$ e $\rho = 2$; c) $k = \dfrac{4\sqrt{7}}{49}$ e $\rho = \dfrac{7\sqrt{7}}{4}$;

d) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e $\rho = 2\sqrt{2}$; e) $k = \dfrac{1}{2}$ e $\rho = 2$; f) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e $\rho = 2\sqrt{2}$

4. a) $\rho(t) = 2\sqrt{2}(1 + \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}}$; b) $\rho(t) = \dfrac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})^2}{2}$

6. a) $k(t) = \dfrac{2000}{(4 \times 10^4 \operatorname{sen}^2 t + 100\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

b) (200,0) e $(-200, 0)$ são pontos de máximo , (0,10) e $(0, -10)$ são pontos de mínimo

7. O ponto de velocidade máxima é $(2\pi, 4)$ e os pontos de velocidade mínima são (0,0) e $(4\pi, 0)$

8. 3

9. vetor posição: (4,5) , vetor velocidade: $\dfrac{dx}{dt}\left(1, \dfrac{4}{5}\right)$, vetor aceleração: $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 \left(0, \dfrac{9}{125}\right)$, vetor tangente unitário: $\left(\dfrac{5}{\sqrt{41}}, \dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)$, vetor normal unitário: $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}, \dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)$, $A_T = \dfrac{36}{125\sqrt{41}}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$, $A_N = \dfrac{9\sqrt{41}}{1025}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$

10. a) $V = \left(\dfrac{3}{\sqrt{17}}, \dfrac{12}{\sqrt{17}}\right)$; b) $A = \dfrac{1}{(17)^{\frac{5}{2}}}(65, 46)$

11. $v \leq 30\sqrt{2}$

12. a) $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2} - 5t^2$; b) $V(t) = (5 \operatorname{sen} 5t^2, 5 \cos 5t^2)$

Exercícios 2.3

18. $x^2 + z^2 = 4y$

19. $z = 4 + x^2 + y^2$

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

21. $y^2 + z^2 = e^{-2x^2}$

22. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

23. $x^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 y$

24. $z = y$, $-2 \leq y \leq 2$; eixo y

25. $y = \sqrt{16 - 4z^2}$; eixo z

26. $y = \dfrac{z^2}{4}$; eixo z 27. $z = \sqrt{|y|}$; eixo y

28. $z = e^{-y^2}$; eixo z

Exercícios 2.5

1. a) $3y^2 + z^2 = 4$, elipse ; b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{9}{25}$, hipérbole ;
c) $x^2 = 16z^2$, duas retas; d) $z = 4y^2 + 12$, parábola

2. c) semi-esfera 3. c) elipsóide

4. c) hiperbolóide de uma folha cujo eixo é o eixo y

5. c) hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é o eixo x

6. c) cone cujo eixo é o eixo z

7. c) parabolóide elíptico cujo eixo é o eixo z

8. c) uma porção de circular cujo eixo é o eixo y

9. c) porção de um cilindro cuja geratriz é paralela ao eixo z e cuja diretriz é a parábola $y = 1 + x^2$, $-2 \leq x \leq 2$

10. c) dois planos de equações $z - y + 1 = 0$ e $z + y - 1 = 0$

11. c) esfera de centro em (1,1,0) e raio 1

12. c) hiperbolóide de uma folha cujo eixo é a reta $y = 2$ no plano $x = 0$

13. c) hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é o eixo y

14. $x^2 + z^2 - \dfrac{4}{9}y^2 = 0$, cone circular cujo eixo é o eixo y

15. $x^2 + (z-1)^2 = 2y + 1$, parabolóide circular cujo eixo é a reta $z = 1$ no plano $x = 0$

Exercícios 3.2

1. a) $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \geq 4 - x\}$; b) $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \geq 1 + x^2\}$;

c) $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y > -x \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}$; d) $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

3. a) Se $k < 2$ é vazia, se $k = 2$ é o ponto (0,0,2) e se $k > 2$ são circunferências de centro $(0,0,k)$ e raio $(k-2)$;

b) O traço xz é o gráfico da função $z(x) = 2 + |x|$ e o traço yz é o gráfico da função $z(x) = 2 + |y|$

4. a) As equações são: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ e $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{9}$, respectivamente ;

b) É a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$

5. a) No plano $z = 8$ é o ponto (0,0,8), no plano $z = 6$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$, no plano $z = 0$ vazia, no plano $x = 0$ é o gráfico da função $z(y) = \begin{cases} 8 - y^2 & , |y| \leq 2 , \\ 4 & , |y| > 2 \end{cases}$, no plano $y = 0$ é o gráfico da função

$$z(x) = \begin{cases} 8 - x^2 & , |x| \leq 2 , \\ 4 & , |x| > 2 \end{cases} .$$

6. a) $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \leq 10 - y^2\}$ e Imagem da $f = [0, +\infty)$; b) Nos planos

$z = 0$, $z = 1$ e $z = 2$ são parábolas de equações $x = 10 - y^2$, $x = 9 - y^2$ e $x = 6 - y^2$, respectivamente. No plano $y = 0$ é a parábola de equação $x = 10 - z^2$, $z \geq 0$ e no plano $x = 0$ é a semi-circunferência $y^2 + z^2 = 10$, $z \geq 0$

7. $f(x, y) = x - ay^2$, $a > 0$ e $g(x, y, z) = 3 - x$

9. a) Domínio $= \{(x, y) \in I\!R^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} \leq 1\}$;

b) A elipse de equação $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

c) $\sigma(\theta) = (\sqrt{3}\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; d) $2\sqrt{6}$

10. b) Circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$; c) $y = \sqrt{3}x$

11. Cone elíptico de equação $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$

12. a) Domínio $= I\!R^3 - \{(0, 0, 0)\}$. As superfícies de nível têm equação $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{k}$ e, portanto, são esferas quando $k > 0$.

b) Domínio $= I\!R^3 - \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. As superfícies de nível são esferas de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + e^k$, $k \in I\!R$. ;

c) Domínio $= I\!R^3$. As superfícies de nível têm equação $x^2+y^2+(z-1)^2 = k$ e, portanto, quando $k > 0$ são hiperbolóides de uma folha, quando $k = 0$ é um cone circular de vértice em (0,0,1) e quando $k < 0$ são hiperbolóides de duas folhas. ;

d) Domínio $= I\!R^3$. As superfícies de nível têm equação $x^2 + z^2 = e^{2y} + k$

e, portanto, são superfícies de revolução em torno do eixo y das curvas de equação $z = e^y$, quando $k = 0$ e $z = \sqrt{k + e^{2y}}$, quando $k \neq 0$.

Exercícios 3.4

1. a) 2 ; b) -1 2. a) 0 ; b) não existe ; c) 0 ; d) não existe.

As funções de a) e c) são contínuas.

4. a) $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$; b) $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

c) $f(x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios 3.6

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y + 6$ 2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x^2 + xy}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

3. $f_y(x,y) = e^{\frac{y}{x}}\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) - \dfrac{1}{y}\right]$ 4. $f_x(x,y) = -\ln(\operatorname{sen} x)$

5. $f_y(x,y,z) = x^2 - 6xy + 2z$ 6. $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$

7. $\dfrac{1}{6}$

8. a) f não é diferenciável em (0,0) ; b) f não é diferenciável em (0,0) ;

c) f é diferenciável em (0,0) ; d) f não é diferenciável em (0,0)

9. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right] & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right] & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{6}, -\frac{1}{12}\right)$; b) $(-1, 1, -3)$ 11. $(0, -4, 2)$

12. a) $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$;

b) $12y - 2z - 9 = 0$ 13. a) $20x + 12y - 15z = 120$; b) $14\sqrt{2}$

14. $5\sqrt{2}$

15. a) $\left(-2, 2, \frac{3}{2}\right)$; b) $x(t) = -2 - t$, $y(t) = 2 - 3t$, $z(t) = \frac{3}{2} + 2t$, $t \in I\!R$

Exercícios 3.8

1. $\frac{dz}{dt} = (\cos t - \operatorname{sen}^2 t)e^{\cos t} + (\cos^2 t - \operatorname{sen} t)e^{\operatorname{sen} t}$

2. $\frac{dz}{dt} = (e^{2t} - e^{-2t})(1 + \ln(e^{2t} + e^{-2t}))$

3. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{3u^2 e^v}{v^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^3 e^v (v-2)}{v^3}$

4. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \operatorname{sen}^2 v - 2v^2 \operatorname{sen} u \cos u$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2 \operatorname{sen} v \cos v + 2v \cos^2 u$

5. 12

6. a) $\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 4t-1)\,2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 4t-1)\,4$;

b) $x(t) = 1 + 2t$, $y(t) = 3 + 4t$, $z(t) = -1 - 4t$, $t \in I\!R$

7. $\dfrac{\partial F}{\partial u}(0,2) = 6$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0,2) = -11$ 8. $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1) = 2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(1,1) = -2$

10. Equação do plano tangente: $2x + y - 2z = 5$.

Equação da reta normal: $\sigma(t) = (4 + 2t, -1 + t, 1 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

11. (3,1,2) 13. $x + 4y + 6z - 21 = 0$ e $x + 4y + 6z + 21 = 0$

15. a) $x + 4y - 5z = 0$; b) $\sqrt{42}$

16. a) (3,2,4) ; b) $(6, 4, -8)$ e $(-6, -4, 8)$

17. a) $x - y + z = 1$; b) $\sigma(t) = (1 - 2t, 1 + t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$

Exercícios 3.10

1. $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 2. $-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 3. $-\dfrac{4\sqrt{3}}{21}$ 4. $\dfrac{2}{3}$

5. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. a) $3\sqrt{2}$; b) $\dfrac{7\sqrt{26}}{13}$; c) Na direção do vetor $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

8. $-\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ 9. $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

10. a) Nordeste: esfriará , Sudeste: não aquecerá nem esfriará ; b) Aquecerá à taxa de $\dfrac{125}{2}$ graus/s ; c) $\dfrac{25}{2}$ graus/s ; d) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11. a) zero ; b) Na direção do vetor (4,2,0). A taxa máxima é $2\sqrt{5}$.

12. a) Na direção do vetor (1,2,3) ; b) $-2\sqrt{14}\ e^2$; c) $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, onde θ é o ângulo entre o vetor que representa a direção a ser tomada e o vetor $\nabla T(P_0)$.

Exercícios 3.12

1. a) $f_{xx}(x,y) = \dfrac{3(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; b) $f_{yx}(x,y) = \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. a) $f_{yy}(x,y) = -x\cos y$, b) $f_{xy}(x,y) = -\operatorname{sen} y - e^x$

3. a) $f_{xx}(x,y,z) = \dfrac{2(-x^2+8y-3z^2)}{(x^2+8y-3z^2)^2}$; b) $f_{zy}(x,y,z) = \dfrac{48z}{(x^2+8y-3z^2)^2}$

4. a) $f_{xz}(x,y,z) = 2x(\cos(x^2z) - x^2z\operatorname{sen}(x^2z))$; b) $f_{yzx}(x,y,z) = 0$

Exercícios 4.2

1. a) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ pontos de sela ;

   b) $(0,k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ pontos de sela ;

   c) (0,0) ponto de sela e $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ ponto de máximo relativo ;

   d) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ ponto de mínimo relativo ;

   e) (0,1) e $(0,-1)$ pontos de máximo relativo e $(x,0)$, $x \in I\!R$ pontos de mínimo

3. a) máximo $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ em $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$, mínimo 0 em (0,0) ;

   b) máximo 1 em (0,1) e (1,0) , mínimo $-\dfrac{1}{2}$ em $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$;

   c) máximo e^3 em (1,1) e $(-1,1)$, mínimo $e^{-\frac{1}{4}}$ em $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$

4. a) $a = \dfrac{9}{2}$, $b = \dfrac{5}{2}$

5. Largura: 4 cm . Ângulo: $\dfrac{\pi}{3}$ radianos

6. Distâncias iguais a $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Exercícios 4.4

1. Máximo: $\frac{13}{4}$, mínimo: 1 2. Maior aquecimento: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, menor aquecimento: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 3. $\frac{\sqrt{23}}{2}$

5. $-\frac{\sqrt{10}}{4} + 5\sqrt{2}$ 6. (2,4) ou $(-2, -4)$

7. $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$

8. Base quadrada de lado $2\sqrt{3}$ m e altura $\sqrt{3}$ m

10. $2x + y + 2z = 6$ 11. $3\sqrt[3]{k}$ 12. a) $\ln(3\sqrt{3}\,a^5)$

13. 30 14. $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$

15. 20 e 4

Exercícios 5.4

2. a) $\frac{(e-1)}{2}$; b) $1 - \cos 1$

3. a) $\frac{1 - \cos 64}{3}$; b) $\frac{\text{sen} 8}{3}$; c) $\frac{56}{3}$; d) $2\left(e - e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

4. b) zero 5. a) $\frac{243}{4}$; b) $\frac{5}{4}$ 6. $\frac{76}{15}$ 7. $\frac{625}{12}$

8. $\frac{8}{15}$ 9. $\frac{896}{15}$

Exercícios 5.6

1. (b) 2 2. (a) 4 3. $\frac{\text{sen} 1}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

5. 1 6. 24 7. (a) $\dfrac{4\pi}{5}$; (b) $\dfrac{5\pi}{16}$; (c) zero

8. $\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$ 9. 6

10. a) $\dfrac{35\pi}{2}$; b) $\dfrac{256\pi}{3}$; c) $\dfrac{32}{9}$; d) $\dfrac{9\pi+10}{12}$ 11. $\dfrac{(e-1)\ln 2}{2}$

12. a) $\dfrac{[(p^2+a^2)^{1-p}-p^{2(1-p)}]\pi}{1-p}$ se $p\neq 1$ e $\pi\ln(1+a^2)$ se $p=1$;

b) $p>1$.

Exercícios 5.8

1. $m=\dfrac{27}{2}$; $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{6}{5}\right)$ 2. $m=45+\dfrac{27}{2}\pi$; $\left(0,\dfrac{3(3\pi+8)}{4(3\pi+10)}\right)$

3. $m=15$; $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{15}{8}\right)$ 4. $m=\dfrac{7}{12}$; $\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{9}{7}\right)$

5. $m=\dfrac{10}{3}$; $\left(\dfrac{39}{25},\dfrac{206}{75}\right)$

6. $I_x=\dfrac{56}{15}$; $I_y=\dfrac{8}{3}$ 7. $I_x=\dfrac{3e^4+1}{64}$; $I_y=\dfrac{3+e^2}{16}$

8. $I_x=I_y=\dfrac{ka^7\pi}{7}$ 9. $I_x=I_y=\dfrac{9}{8}$ 10. $I_x=\dfrac{24}{35}$. ; $I_y=\dfrac{148}{45}$.

Exercícios 5.11

1. a) $\dfrac{26}{3}$; b) $\dfrac{1}{364}$; c) $\dfrac{44}{105}$; (d) zero

2. a) $\dfrac{\pi}{6}$; b) $8\sqrt{2}\pi$; c) $\dfrac{21\pi-4}{6}$; d) $\dfrac{5\pi}{3}$; e) $\dfrac{625}{12}$;

f) $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$; g) $\dfrac{16\pi}{3}-\dfrac{64}{9}$; h) $\dfrac{(21\sqrt{2}-16\sqrt{3})\pi}{6}$

3. $\dfrac{8a^2}{9}$ 4. a) $\dfrac{9\pi}{64}$; b) $(\sqrt{2}-1)2\pi$; c) π ; d) $\dfrac{a^2b^2c^2}{48}$;

e) i) πa^4 ; e) ii) $\frac{\pi}{10}$; f) $\frac{(3\pi+2)\sqrt{2}}{8}$; g) $\frac{65\pi}{8}$ 5. 10π

Exercícios 6.3

1. a) $1+\sqrt{2}$; b) zero ; c) $\frac{256}{15}$; d) 2 ; e) $2\sqrt{14}$; f) $\frac{13\sqrt{2}}{6}$

2. 4 3. $(8+6\pi)M$

4. a) $-\frac{369}{10}$; b) zero ; c) -4π ; d) $\frac{4}{3}$;

e) $\frac{23}{6}$; f) zero ; g) zero ; h) $\frac{4+10\sqrt{2}}{15}$

5. $2a^3$ 6. $\frac{\pi a^3}{4}$

7. a) $f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y$; b) $f(x,y)=x^2y^2-xy^3+2y$;

c) $f(x,y)=x^3+2xy-y^2e^x$; d) $f(x,y,z)=xy+xz+yz$;

e) $f(x,y,z)=xe^{y+2z}$; f) $f(x,y,z)=xy\operatorname{sen} z$.

Exercícios 6.5

1. a) zero ; b) -1 ; c) $-\frac{3\pi}{2}$; d) $\frac{16}{5}$; e) $\frac{1}{30}$; f) $-2\pi a^2$;

g) $\frac{195\pi}{4}$; h) 10 3. $2\pi+4$, sentido anti-horário

4. b) $\frac{26}{3}$ 5. 42π 6. a) 14π ; b) 38π

Exercícios 6.7

1. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$

2. a) $-\dfrac{10}{3}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $x_o^2y_o - \dfrac{y_o^3}{3} - \dfrac{2}{3}$; d) $x_o \operatorname{sen} y_o$

3. a) $f(x,y) = x^2y^3 - y^2\operatorname{sen}x + y$; b) $\dfrac{\pi^2}{4}$

4. $-\pi$ 5. -2π , 2π e 0 7. 7 8. -3

9. -2π , 2π e 0 10. $2\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Exercícios 7.2

1. a) parabolóide circular ; S é regular exceto no ponto $(0,0,1)$;

   c) $(1,0,-2)$; d) $(0,1,0)$;

   e) Equação da reta normal: $x(t) = 1-2t$, $y(t) = 0$ e $z(t) = -t$, $t \in \mathrm{R}$;

   Equação do plano tangente: $2x + z - 2 = 0$

2. a) $\varphi(\phi,\theta) = ((a + r\operatorname{sen}\phi)\cos\theta, (a + r\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi)$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$;

   b) $(a + r\operatorname{sen}\phi)(r\operatorname{sen}\phi\cos\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\phi)$;

   c) S é regular em todos os pontos.

4. a) , b) e c) $x + y + \sqrt{2}\,z = 4$

5. a) $\varphi(u,\theta) = (\cosh u\cos\theta, \cosh u\operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh}u)$, $u \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta \le 2\pi$;

   b) $(\cosh^2 u\cos\theta, \cosh^2 u\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{senh}u\cosh u)$; c) $x_0\,x + y_0\,y = 1$.

6. b) $N = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$; c) sim

Exercícios 7.4

1. a) $\varphi(t,v) = (t\operatorname{sen}v, t\cos v, 3 - t^2).$, $1/2 \le t \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$;

b) $\dfrac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})\pi}{6}$

2. a) $\varphi(t,v)=(t\cos v, t\operatorname{sen} v, t^2)$, $0\le t\le 4$, $0\le v\le 2\pi$;

b) $\dfrac{(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})\pi}{6}$ 3. $\dfrac{(5\sqrt{5}-1)A}{6}$

4. a) 8 ; b) $2\sqrt{6}\,\pi$; c) $\dfrac{(4-\sqrt{2})\pi}{2}$; d) $(4+\sqrt{12})\,6\pi$;

e) $\pi+4-4\sqrt{2}$; f) $\dfrac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{3}$; g) $a\,\alpha\,h$.

Exercícios 7.6

1. a) $\dfrac{8\pi a^4}{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$; c) $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{16}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{7\sqrt{2}}{12}\right)\pi$ 2. $\dfrac{25\sqrt{5}-11}{120}$

3. $\dfrac{(1+\sqrt{2})2\pi}{3}$ 4. a) $\left(0,\,0,\,\dfrac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}\right)$; b) $\left(0,\,0,\,\dfrac{14}{9}\right)$.

Exercícios 7.8

1. zero 2. $\dfrac{1}{2}$ 3. zero 4. $(8-3\sqrt{3})4\pi$

5. 16 6. π (normal exterior a S) 7. $\dfrac{\pi}{2}$ 8. 4π.

Exercícios 7.10

7. $\dfrac{a^3}{2}$ 8. $a=1$ 9. $\dfrac{3}{2}$ 10. zero

11. zero 12. $2\ln(\pi+1)$ 13. $3e^{-1}$ 14. zero

15. 4 (de $(0,2,0)$ para $(2,0,0)$) 16. 24 17. 32

Exercícios 7.12

1. $10\pi+16$ 2. $\dfrac{81\pi}{4}$ 4. 6π 5. $\dfrac{(1024\sqrt{2}-400)\pi}{5}$

6. $\frac{\pi}{15}(890 + 3\sqrt{2})$ 7. $c = 1$ 8. zero 9. $\frac{\pi}{2}$

10. -12

11. a) $4\pi(b-a)$; b) 4π 12. 76π 13. 10

Exercícios A.1

1. b) $3x + 2y - 1 = 0$

2. a) $(-6, 3)$ e $(6, -3)$; b) $x = -3$; c) ponto de máximo

4. a) não ; b) sim ; c) não 5. b) 5

6. $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$ e $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$

7. a) $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$; b) $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$.

Exercícios A.2

1. b) $\frac{3\sqrt{5}}{35}$ 2. a) -9 ; b) -7

3. $\frac{\partial z}{\partial x}(5,-1) = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(5,-1) = 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(5,-1) = 2$

4. b) $(2, 1, \sqrt{3})$ 5. $9x + 6\sqrt{11}\,y + 8z = 36$.

Exercícios A.3

1. $\frac{dx}{dz}(-1) = -2$ e $\frac{dy}{dz}(-1) = 3$ 2. sim

3. b) $\sqrt{2}\,y - z = 0$

Exercícios A.4

1. -1 2. $\dfrac{\partial x}{\partial u}\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,0\right) = 0$ e $\dfrac{\partial x}{\partial v}\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,0\right) = \dfrac{\pi}{12}$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(3\,,\,4) = -5$ 4. $\forall(x\,,\,y) \in \mathrm{R}^2.$

ÍNDICE ALFABÉTICO

Área de superfícies,255

Astróide,15

Bola aberta,80,81

Bordo de uma superfície,272

Campo vetorial conservativo,235,289

Campo vetorial contínuo,213

Campo vetorial de classe C^1, 225

Centro de massa,189,266

Centróide,189

Ciclóide,5

Cilindros,51

Círculo de curvatura,40

Componente normal da aceleração,36

Componente tangencial da aceleração,36

Comprimento de arco como parâmetro,30

Comprimento de uma curva,25

Cone elíptico,63

Conjunto aberto,92

Conjunto fechado,136

Conjunto limitado,136

Conjunto simplesmente conexo,235

Coordenadas cilíndricas,198

Coordenadas esféricas,200

Coordenadas polares,179

Curva de Agnesi,13

Curva de nível,72

Curvas definidas implicitamente,309,317

Curvatura,39

Derivada de função vetorial,8

Derivada direcional,116

Derivada parcial,87,91

Derivada parcial de segunda ordem,123

Determinante Jacobiano,175,197

Diretriz de um cilindro,51

Divergente,297

Domínio,235

Eixo de uma superfície de revolução,54

Elipsóide,60

Equação de Laplace,127

Equações de Cauchy-Riemann,127

Equações paramétricas de uma curva,2

Equações paramétricas de uma superfície,248

Fluxo,268

Fronteira de um conjunto,136

Função contínua,2,83,84

Função de classe C^1,8,101

Função de classe C^1 por partes,25

Função de classe C^2,124

Função de várias variáveis,69

Função harmônica,127

Função limitada,157

Função potencial,220,239

Função vetorial,1

Geratriz,51,54

Gráfico de função de várias variáveis,70

Hélice circular,7

Hiperbolóide de duas folhas,62

Hiperbolóide de uma folha,61

Hipociclóide,14

Integral de linha de campo vetorial,214

Integral de linha de função escalar,209

Integral de superfície de campo vetorial,267

Integral de superfície de função escalar,262

Integral dupla sobre um retângulo,156

Integral dupla sobre uma região qualquer,165

Integral tripla,192

Involuta,13

Limite,2,80,81

Massa,187,195,208,263

Momento de inércia,190

Mudança de variáveis cilíndricas,198

Mudança de variáveis esféricas,200

Mudança de variáveis lineares,177

Mudança de variáveis na integral dupla,173

Mudança de variáveis na integral tripla,197

Mudança de variáveis polares,179

Multiplicadores de Lagrange,141

Parabolóide,56,65,66

Parametrizações equivalentes,28,276

Partição,156

Plano,47

Plano tangente,99,111,249

Ponto crítico,130

Ponto de sela,131

Ponto extremo relativo,128

Raio de curvatura,40

Região de tipo I e II em $\mathbb{R}^2$,167

Região de tipo I,II e III em $\mathbb{R}^3$,194,195

Região simples,224

Regra da cadeia,10,104,107

Reta normal,100,111

Rotacional,281

Soma de Riemann,157

Superfície definida implicitamente,314

Superfície de nível,75

Superfície de revolução,54

Superfície orientada,267,273

Superfície quádrica,59

Superfície regular,249

Teorema da função implícita,311,315,317,320

Teorema de Fubini,161

Teorema de Gauss,297

Teorema de Green,225

Teorema de Stokes,281

Teste da derivada segunda,131

Trabalho,213

Valor máximo,128,136

Valor mínimo,128,136

Vetor aceleração,18

Vetor gradiente,108

Vetor normal,100,108

Vetor normal principal,35

Vetor tangente,8

Vetor tangente unitário,35

Vetor velocidade,18

Vizinhança,310